実数の定義 (その1) – Dedekind 切断

小学校のときから、「数直線」ということを学んできました。数直線とは、実数全体の集合 $\mathbb{R}$ をイメージするためのものです。ところが、実数をきちんと定義することは、実はかなり難しいことです。歴史的に見ても、実数概念がきちんと定義されたのは、１９世紀の後半です。この節では、実数の定義についてきちんと説明してみます。

実数を厳密に定義する際の前提として、整数全体の集合 $\mathbb{Z}$ と有理数全体の集合 $\mathbb{Q}$ はあらかじめ定義されていて、みなさんもよくわかっているとします。まず、有理数とその上の数学的構造について、きちんとまとめておきます。有理数の集合 $\mathbb{Q}$ 上には、2 つの演算、加法 $+$ と乗法 $\times$ が定義され、次の事が成り立ちました。以下、$a, b, c \in \mathbb{Q}$ とします。

I-(1) **結合律** (associativity) $(a+b)+c = a+(b+c)$, $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$.

I-(2) **交換律** (commutativity) $a + b = b + a$, $a \times b = b \times a$.

I-(3) **分配律** (distributivity) $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$.

I-(4) **単位元の存在** 特別な数 $0, 1 \in \mathbb{Q}$ が存在し、全ての $a \in \mathbb{Q}$ に対して、

$$a + 0 = 0 + a = a, \qquad a \times 1 = 1 \times a = a$$

が成り立つ。

I-(5) **逆元の存在** 全ての $a \in \mathbb{Q}$ に対してある $b \in \mathbb{Q}$ が存在し、$a+b = b+a = 0$ となる。この b を、$-a$ と書く。また、全ての $a \in \mathbb{Q}$, $a \neq 0$ に対してある $b \in \mathbb{Q}$ が存在し、$a \times b = b \times a = 1$ となる。この b を、$1/a$ と書く。

以上の性質をまとめて、「有理数全体の集合 $\mathbb{Q}$ は乗法と加法について**体**(field) になる」と言います。

小学生でも知っている事ですが、有理数体 $\mathbb{Q}$ の各要素には大小関係という**順序** (order) が定義されています。順序の公理は、次のようなものでした。以下、$a, b, c \in \mathbb{Q}$ とします。

II-(1) **反射律** (reflexivity) $a \leq a$.

II-(2) **反対称律** (antisymmetry) $a \leq b$ かつ $b \leq a$ ならば $a = b$.

II-(3) **推移律** (transivity) $a \leq b$ かつ $b \leq c$ ならば $a \leq c$.

II-(4) **全順序性** (totality) 全ての $a, b \in \mathbb{Q}$ に対して、$a \leq b$ または $b \leq a$ のいずれかが成り立つ。

以上の性質をまとめて、「$(\mathbb{Q}, \leq)$ は**全順序集合** (totally ordered set) である」と言います。$\mathbb{Q}$ 上の加法と乗法、さらに順序に関して次の性質が成り立ちました。

II-(5)　$a \leq b$ ならば、任意の $c \in \mathbb{Q}$ に対して $a + c \leq b + c$ である。

II-(6)　$a \leq b$ ならば、任意の $c \in \mathbb{Q}$, $c > 0$ に対して $a \times c \leq b \times c$ である。

II-(7) **稠密性** (density)　$a < b$ ならば、ある $c \in \mathbb{Q}$ が存在して $a < c < b$ となる。

これまで、全順序が定義された有理数体 $\mathbb{Q}$ の基本的性質をまとめました。これからやりたいことは、このような有理数体を含む実数全体の集合 $\mathbb{R}$ を定義することです。同値なやり方が何通りか知られています。

Dedekind 切断

有理数体 $\mathbb{Q}$ を、次の性質を満たす 2 つの集合 A, B にわけることを考えます。

(C_1)　$\mathbb{Q} = A \cup B.$

(C_2)　$A \cap B = \emptyset$, $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$.

(C_3)　$a \in A$ かつ $b \in B$ ならば、$a \leq b$ が成り立つ。

上の性質を満たす集合 A, B の対 (A, B) を、**Dedekind 切断**(Dedekind's cut)、あるいは単に**切断**といいます。切断 (A, B) が与えられたとき、次の 3 つの場合が考えられます。

(i) A には最大元がなく、B に最小元がある。

(ii) A に最大元があり、B には最小限がない。

(iii) A に最大元がなく、B にも最小限がない。

例 1 $A := \{p \in \mathbb{Q} \mid p < 1/2\}$, $B := \{p \in \mathbb{Q} \mid p \geq 1/2\}$ とすると (A, B) は Dedekind 切断であり、上の (i) の場合です。この切断 (A, B) は、有理数 $1/2$ に対応すると考えられます。

例 2 $A := \{p \in \mathbb{Q} \mid p \leq -1/3\}$, $B := \{p \in \mathbb{Q} \mid p > -1/3\}$ とすると (A, B) は Dedekind 切断であり、上の (ii) の場合です。この時は、$A' := A \backslash \{-1/3\}$, $B' := B \cup \{-1/3\}$ とすると、(A', B') は場合 (i) の切断になります。この切断 (A, B), (A', B') は、有理数 $-1/3$ に対応すると考えられます。以下、有理数に対応する切断では、必ず場合 (i) となっていると約束することにします。

例 3 $A := \mathbb{Q}^- \cup \{p \in \mathbb{Q} \mid p^2 \leq 2\}$, $\mathbb{Q}^- := \{p \in \mathbb{Q} \mid p < 0\}$, $B := \mathbb{Q} \backslash A$ とすると、(A, B) は場合 (iii) の切断になります。この切断 (A, B) に対応する有理数は存在しません。

上の例から分かるように、場合 (i),(ii) の切断は有理数に対応しますが、場合 (iii) の切断に対応する有理数は存在しません。逆にいうと、切断を考えることにより、有理数体 $\mathbb{Q}$ を真に含む集合を定義することができそうなことがわかります。そこで、次のように定義します。

定義 1 有理数体 $\mathbb{Q}$ の *Dedekind* 切断 (A, B) を、**実数** *(real number)* と呼ぶ。実数全体の集合を $\mathbb{R}$ と書く。

有理数 $q \in \mathbb{Q}$ に対して

$$A_q := \{x \in \mathbb{Q} \mid x < q\}, \qquad B_q := \{x \in \mathbb{Q} \mid x \geq q\}$$

と定義すると (A_q, B_q) は切断になり、対応

$$\mathbb{Q} \ni q \mapsto (A_q, B_q) \in \mathbb{R}$$

により 1 対 1 写像 $\iota : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ が定義できます。この写像 ι により $\iota(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{R}$ となりますが、$q \in \mathbb{Q}$ と $\iota(q)$ を同一視して $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ と考えることができます。

次に、$\mathbb{R}$ 上に順序を定義します。2 つの実数 $x = (A_x, B_x)$, $y = (A_y, B_y) \in \mathbb{R}$ に対して、

$$x \leq_{\mathbb{R}} y \overset{\text{def}}{\iff} A_x \subset A_y \tag{1}$$

と定義します。すると、この順序 "$\leq_{\mathbb{R}}$" が集合 $\mathbb{R}$ 上で順序の公理 II-(1) から II-(4) を満たすことが簡単に確かめられます。つまり、$(\mathbb{R}, \leq_{\mathbb{R}})$ は全順序集合になります。また、$\mathbb{Q}$ 上の通常の順序 $\leq$ と $\mathbb{R}$ 上の順序 $\leq_{\mathbb{R}}$ は整合することもわかります。つまり、$p, q \in \mathbb{Q}$ に対して、

$$p \leq q \iff \iota(p) \leq_{\mathbb{R}} \iota(q)$$

が成り立ちます。よって、以下 $\leq_{\mathbb{R}}$ を $\leq$ と書いても、問題ないことが分かります。

演習問題: 実数の集合 $\mathbb{R}$ 上で(1)により定義された順序 $\leq$ が、性質 II-(1) から II-(4) までを満たすことを示しなさい。

2 つの集合 $X, Y \subset \mathbb{Q}$ に対して、$X + Y := \{p + q \mid p \in X, q \in Y\}$, $X - Y := \{p - q \mid p \in X, q \in Y\}$ と定義します。実数 $x = (A_x, B_x)$, $y = (A_y, B_y) \in \mathbb{R}$ に対して、$x + y$, $x - y$ を次のように定義します :

$$x + y := (A_x + A_y, B_x + B_y), \qquad x - y := (A_x - B_y, \mathbb{Q} \backslash (A_x - B_y)).$$

実数 $x \in \mathbb{R}$ に対して、$-x := 0 - x$ として定義します。ただし、$\iota(0) = (\mathbb{Q}^-, \mathbb{Q}^+)$ で

$$\mathbb{Q}^+ := \{p \in \mathbb{Q} \mid p \geq 0\}, \qquad \mathbb{Q}^- := \{p \in \mathbb{Q} \mid p < 0\}$$

です。

演習問題： 実数 $x = (A_x, B_x)$, $y = (A_y, B_y)$ に対して、上のように定義した $x + y$, $x - y$ がそれぞれ $\mathbb{Q}$ の切断であることを示しなさい。

実数 $x = (A_x, B_x) \geq 0$, $y = (A_y, B_y) \geq 0$ に対して、乗法 $x \times y$ を

$$A^+_{x \times y} := \{p \times q \mid p \in A_x \cap \mathbb{Q}^+, q \in A_y \cap \mathbb{Q}^+\}, \quad A_{x \times y} := \mathbb{Q}^- \cup A^+_{x \times y},$$
$$x \times y := (A_{x \times y}, \mathbb{Q} \backslash A_{x \times y})$$

と定義します。一般の x, $y \in \mathbb{R}$ については、関係

$$x \times y = -((-x) \times y) = -(x \times (-y)) = (-x) \times (-y)$$

のどれかを使って定義します。実数 $x = (A_x, B_x) \geq 0$, $y = (A_y, B_y) > 0$ に対して、除法 x/y を

$$A_{x/y} := \{p/q \mid p \in A_x, q \in B_y\}, \qquad x/y := (A_{x/y}, \mathbb{Q} \backslash A_{x/y})$$

と定義します。一般の x, $y \in \mathbb{R}$, $y \neq 0$ については、関係

$$x/y = -((-x)/y) = -(x/(-y)) = (-x)/(-y)$$

のどれかを使って定義します。以上で、Dedekind 切断によって定義された実数上に加法と乗法と順序が定義されました。

研究課題： 切断によって定義された実数について、$\mathbb{Q}$ を $\mathbb{R}$ に代える事により性質 I, II が成り立つ事を確かめなさい。

演習問題： 例 3 で定義された切断 $x = (A, B)$ について、$x \times x = \iota(2)$ であることを示しなさい。

これまでの準備の元で、いよいよ実数の最も本質的な性質、**実数の連続性** (continuity of real numbers) を示す事ができます。実数の連続性をきちんと定義するために、いくつかの概念を導入します。実数の集合 $X \subset \mathbb{R}$ に対して、ある $M \in \mathbb{R}$ が存在し

$$x \in X \Longrightarrow x \leq M$$

を満たすときに、M を集合 X の**上界** (upper bound) といいます。集合 X が上界を持つとき、X は**上に有界である**(bounded from above) といいます。実数 $\alpha \in \mathbb{R}$ が集合 X の**上限**(supremum) であるとは、実数 $x \in \mathbb{R}$ と任意の正実数 $\varepsilon > 0$ に対して

「$x \in X \Longrightarrow x \leq \alpha$」 かつ 「$\alpha - \varepsilon < x_0$ となるような $x_0 \in X$ が存在する」

が成り立つこととします。集合 X の上限を、$\sup X$ と書きます。

定理 2 (実数の連続性 1) 集合 $X \subset \mathbb{R}$ が上に有界ならば、X の上限 $\sup X \in \mathbb{R}$ が存在する。

証明： 集合 X の任意の要素 x を切断として $x = (A_x, B_x)$ と書くとするとき、

$$A := \bigcup_{x \in X} A_x \subset \mathbb{Q}, \quad B := \mathbb{Q} \backslash A, \qquad \alpha := (A, B) \in \mathbb{R}$$

と定義します。このとき、(1) (A, B) が $\mathbb{Q}$ の Dedekind 切断を与える、(2) α が X の上限になっている、の 2 点を示せば証明は完了します。いずれもそれほど難しくないので、演習問題とします。□

演習問題： この 2 つの命題を示しなさい。(ヒント : (1) まず、$B \neq \emptyset$ を示し、次に、$a \in A$, $b \in B \Longrightarrow a \leq b$ を示す。(2) 上限の定義に従って、$\alpha = \sup X$ を示す。)

実数体 $\mathbb{R}$ が定義されたので、$\mathbb{R}$ の切断も定義できます。次の 3 つの性質を満たす集合 A, $B \subset \mathbb{R}$ の対 (A, B) を、**Dedekind 切断**(Dedekind's cut)、あるいは単に**切断**といいます。

(C_1) $\mathbb{R} = A \cup B.$

(C_2) $A \cap B = \emptyset$, $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$.

(C_3) $a \in A$ かつ $b \in B$ ならば、$a \leq b$ が成り立つ。

実数体 $\mathbb{R}$ の Dedekind 切断について、次のことが成り立ちます。

定理 3 (実数の連続性 2) *実数体 $\mathbb{R}$ の任意の Dedekind 切断 (A, B) に対して、次の 2 つのどちらか一方が成り立つ。*

(i) A には最大元がなく、B に最小元がある。

(ii) A に最大元があり、B には最小限がない。

証明： 仮定より $B \neq \emptyset$ なので、B の任意の要素は集合 A の上界になっています。よって、定理 2 より A の上限 $\sup A$ が存在します。このとき、$\sup A \in A$ であるか $\sup A \in B$ のどちらかですが、$\sup A \in A$ ならば $\sup A$ は A の最大元になります。逆の場合も同様です。□

演習問題： 定理 3 の証明では、定理 2 を使いましたが、逆に定理 3 が真であると仮定して、定理 2 を証明しなさい。(ヒント：上に有界な集合 $X \subset \mathbb{R}$ の上界全体の集合を B とし、$A := \mathbb{R} \backslash B$ とすると、(A, B) は $\mathbb{R}$ の切断になります。)

定理 3 の証明と演習問題からわかることは、定理 2 と定理 3 の主張は同値であるということです。この節では、Dedekind 切断を使って実数を定義し、そこで定理 2 の「実数の連続性 1」を示しましたが、別の方法で性質 I, II を満たす実数の体系を定義し定理 3 の「実数の連続性 2」を示せば、自動的に「実数の連続性 1」も成り立つことがわかります。実は、実数の連続性 1,2 に同値な命題が他にもあります。また、違う定義による実数の構成法も知られています。それらについては、以下の節でおいおい紹介していきます。この節の最後に、実数の連続性からアルキメデスの原理が導かれることを示します。

定理 4 (アルキメデスの原理) *2つの正実数 a, b に対して、ある正整数 n が存在し、$na > b$ となる。*

証明： 背理法による。そのような正整数が存在しないと仮定する。すると、

$$X := \{ka \mid k \text{ は正整数}\}$$

と定義された集合 $X \subset \mathbb{R}$ に対して、b はその上界になる。よって、定理 2 により X の上限 $\sup X$ が存在する。上限の定義より、ある正整数 k が存在し、

$$\sup X - a < ka \in X \quad \text{つまり} \quad \sup X < (k+1)a \in X$$

となるが、これは上限 $\sup X$ の定義に矛盾する。□