1　ベクトル空間のテンソル積とテンソル空間

k: 標数 0 の体（$\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ と思えばよい），

V, W, U: k 上の有限次元ベクトル空間,

$\mathrm{Hom}(V, W) := \{$ 線形写像 $v : V \to W\}$,

$\mathcal{L}(V, W; U) := \{$ 双線形写像 $a : V \times W \to U\}$.

定理 1.1　V, W: k 上のベクトル空間

(1) k 上のベクトル空間 U_0 と $\kappa \in \mathcal{L}(V, W; U_0)$ の対 (U_0, κ) が存在し、次の 2 つを満たす：

$(\otimes - 1)$ U_0 は $\kappa(V \times W)$ により生成される。

$(\otimes - 2)$ 任意の $\Phi \in \mathcal{L}(V, W; U)$ に対してある $F_\Phi \in \mathrm{Hom}(U_0, U)$ が存在し、$\Phi = F_\Phi \circ \kappa$ が成り立つ。

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[rr, "\kappa"] \arrow[dr, "\Phi"'] & \circlearrowleft & U_0 \arrow[dl, "F_\Phi"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

(2) (U_0, κ) は次の意味で一意である：「もし、(U_0, κ), (U_0', κ') が (1) を満たせば、線形同型写像 $G : U_0 \to U_0'$ で $G \circ \kappa = \kappa'$ となるものが一意に存在する。」

まず、定理の仮定のもとで、$(\otimes - 1)$ と $(\otimes - 2)$ は次の $(\otimes)$ と同値であることを示す。

$(\otimes)$ 任意の $\Phi \in \mathcal{L}(V, W; U)$ に対してある $F_\Phi \in \mathrm{Hom}(U_0, U)$ が**一意に**存在して、$\Phi = F_\Phi \circ \kappa$ が成り立つ。

証明　$(\Longrightarrow)$　$(\otimes - 2)$ において、F_Φ の一意性を示せばよい。もし、2 つの線形写像 $F, F' : U_0 \to U$ が存在し $V \times W$ 上で $\Phi = F \circ \kappa = F' \circ \kappa$ ならば、$\kappa(V \times W)$ 上では $F = F'$ であるが、$(\otimes - 1)$ より U_0 は $\kappa(V \times W)$ により生成されるので、U_0 上で $F = F'$ である。

$(\Longleftarrow)$　$(\otimes - 2)$ は明らかに成り立つので、$(\otimes - 1)$ が成り立つことを言えばよい。$\kappa(V \times W)$ で生成される U_0 の部分空間を U_0' として、$U_0' = U_0$ を示せばよい。

$\kappa_1 \in \mathcal{L}(V \times W; U_0')$ を $\kappa_1 := \kappa$ と定義し、$(\otimes)$ を $\Phi := \kappa_1$ として使うと、線形写像 $F_{\kappa_1} : U_0 \to U_0'$ で、$\kappa_1 = F_{\kappa_1} \circ \kappa$ となるものが一意に存在する。

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, "\kappa"] \arrow[d, "\kappa"'] \arrow[dr, "\kappa_1"] & U_0 \arrow[d, "F_{\kappa_1}"] \\ U_0 & U_0' \arrow[l, "i"] \end{tikzcd}$$

包含写像 $i : U_0' \to U_0$ を考えると、$i \circ \kappa_1 = \kappa$ なので $\kappa = i \circ F_{\kappa_1} \circ \kappa$ を得る。

これとは別に、$U := U_0$, $\Phi := \kappa$ と定義する。F_κ として $F_\kappa := \mathrm{id}$ （$\mathrm{id} : U_0 \to U_0$ は恒等写像）と定義すると、明らかに $\kappa = F_\kappa \circ \kappa$ が成り立つ。

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, "\kappa"] \arrow[dr, "\kappa"'] & U_0 \arrow[d, "F_\kappa = \mathrm{id}"] \\ & U_0 \end{tikzcd} \tag{1.1}$$

上の 2 つのダイアグラムを比べると、性質 $(\otimes)$ より $F_\kappa = \mathrm{id}$ は一意なので $\mathrm{id} = i \circ F_{\kappa_1}$ であることがわかる。つまり、包含写像 i は全射かつ恒等写像で、$U_0' = U_0$ である。□

定理 1.1 の証明　(2) (U_0, κ), (U_0', κ') の 2 つの対が、(1) を満たすとする。すると、(1) よりある $G \in \mathrm{Hom}(U_0, U_0')$, $G' \in \mathrm{Hom}(U_0', U_0)$ が一意に存在し、$\kappa' = G \circ \kappa$, $\kappa = G' \circ \kappa'$ を満たす：

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, "\kappa"] \arrow[dr, "\kappa'"'] & U_0 \arrow[d, "G"] \\ & U_0' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, "\kappa'"] \arrow[dr, "\kappa"'] & U_0' \arrow[d, "G'"] \\ & U_0 \end{tikzcd}$$

よって、$\kappa = G' \circ G \circ \kappa$ が成り立つので、ダイアグラム(1.1)と比較すると、$(\otimes)$ の写像の一意性より $G' \circ G = \mathrm{id}$ を得る。同様に、$G \circ G' = \mathrm{id}$ もすぐわかるので、$G : U_0 \to U_0'$ は線形同型写像である。この写像 G の一意性は、同様に $(\otimes)$ の写像の一意性よりわかる。

(1) V, W の基底を、$\{e_1, \cdots, e_n\}$, $\{f_1, \cdots, f_m\}$ と取る。nm 次元の任意のベクトル空間 U_0 を取り、その基底を $\{g_{ij}\}_{i=1,\cdots,n, j=1,\cdots,m}$ と書くことにする。すると、

$$(e_i, f_j) \leftrightarrow g_{ij}$$

という 1-対-1 対応が成り立つ。写像 $\kappa : V \times W \to U_0$ を

$$\kappa(v, w) := \sum_{i,j} a_i b_j g_{ij}, \qquad v = \sum_i a_i e_i \in V, \quad w = \sum_j b_j f_j \in W$$

と定義すると、この κ は明らかに双線形写像であり、$\kappa(e_i, f_j) = g_{ij}$ なので、$(\otimes - 1)$ を満たす。任意の $\Phi \in \mathcal{L}(V, W; U)$ に対して、$F_\Phi \in \mathrm{Hom}(U_0, U)$ を、

$$F_\Phi(u) = F_\Phi\left(\sum_{i,j} \gamma_{ij} g_{ij}\right) := \sum_{i,j} \gamma_{ij} \Phi(e_i, f_j), \qquad u = \sum_{i,j} \gamma_{ij} g_{ij} \in U_0$$

と定義する。すると、任意の $(v, w) \in V \times W$ に対して

$$F_\Phi \circ \kappa(v, w) = F_\Phi\left(\sum_{i,j} a_i b_j g_{ij}\right) = \sum_{i,j} a_i b_j F_\Phi(g_{ij}) = \sum_{i,j} a_i b_j \Phi(e_i, f_j) = \Phi(v, w)$$

が成り立つので、この (U_0, κ) は $(\otimes - 2)$ を満たす。□

定理 1.1 の (U_0, κ) の性質 $(\otimes - 1)$, $(\otimes - 2)$ （あるいは $(\otimes)$）を、(U_0, κ) の**普遍性** (universality) という。

> **定義 1.2** ベクトル空間 V, W に対して、定理 *1.1* の (U_0, κ) を、V, W の**テンソル積** *(tensor product)* といい、U_0 を $V \otimes W$ と、$\kappa(v, w)$ を $v \otimes w$ と書く。$\kappa : V \times W \to V \otimes W$ をテンソル積 $V \otimes W$ の**標準写像**という。

$U_0 := \mathcal{L}(V^*, W^*; k)$ とする。$v \in V$, $w \in W$ を任意に取り、固定する。$\phi \in V^*$, $\eta \in W^*$ とすると、対応

$$V^* \times W^* \ni (\phi, \eta) \mapsto \phi(v)\eta(w) \in k \tag{1.2}$$

は $\mathcal{L}(V^*, W^*; k)$ の元である。写像 $\kappa : V \times W \to \mathcal{L}(V^*, W^*; k)$ を、上の対応(1.2)で定義すると、対 $(\mathcal{L}(V^*, W^*; k), \kappa)$ はテンソル積の定義を満たすことが容易に示される。よって、

$$V \otimes W \text{ と } \mathcal{L}(V^*, W^*; k) \text{ を同一視してよい}$$

ことがわかった。(**演習問題**： 対 $(\mathcal{L}(V^*, W^*; k), \kappa)$ が、テンソル積の定義を満たすことを示しなさい。) また、$v, v_1, v_2 \in V$, $w, w_1, w_2 \in W$, $\alpha, \beta \in k$ に対して、

$$(\alpha v_1 + \beta v_2) \otimes w = \alpha(v_1 \otimes w) + \beta(v_2 \otimes w),$$
$$v \otimes (\alpha w_1 + \beta w_2) = \alpha(v \otimes w_1) + \beta(v \otimes w_2).$$

が成り立つことが容易に示せる。さらに、定理 1.1 の証明から、V の基底が $\{e_i\}_{i=1}^n$、W の基底が $\{f_j\}_{j=1}^m$ の時、$\{e_i \otimes f_j\}$ が $V \otimes W$ の基底になることもすぐわかる。よって、特に

$$\dim V \otimes W = \dim V \cdot \dim W$$

を得る。テンソル積 $V \otimes W$ の元 x は、有限和 $x = \sum_{i=1}^r v_i \otimes w_i$ で表すことができる。ただし、このような表現の一意性はなく、その時々で都合の良いものをとる必要がある。また、$x \in V \otimes W$ の有限和表現 $x = \sum_{i=1}^r v_i \otimes w_i$ において、$\{v_1, \cdots, v_r\}$ または $\{w_1, \cdots, w_r\}$ は一次独立であると仮定してよい（例えば、もし $\{w_1, \cdots, w_r\}$ が一次独立でなければ、適当な変換で $x = \sum_{i=1}^{r'} v'_i \otimes w'_i$ で $\{w'_1, \cdots, w'_{r'}\}$ は一次独立になるようにできる。）(**演習問題**： 以上のことを、きちんと示しなさい。)

> **命題 1.3** k 上のベクトル空間として、$\mathcal{L}(V, W; U)$ と $\mathrm{Hom}(V \otimes W, U)$ は同型である：
>
> $$\mathcal{L}(V, W; U) \cong \mathrm{Hom}(V \otimes W, U).$$

証明　テンソル積の定義より、$\Phi \in \mathcal{L}(V, W; U)$ に対して、ある $F_\Phi \in \mathrm{Hom}(V \otimes W, U)$ が存在し、$\Phi = F_\Phi \circ \kappa$ を満たす：

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, "\kappa"] \arrow[dr, "\Phi"'] & V \otimes W \arrow[d, "F_\Phi"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowleft"] \\ & U \end{tikzcd}$$

性質 $(\otimes)$ より、この対応 $\mathcal{L}(V, W; U) \ni \Phi \mapsto F_\Phi \in \mathrm{Hom}(V \otimes W, U)$ は 1-対-1 である。よって、この対応が onto であり、かつ線形であること言えば、証明は完了する。これは簡単で、任意の $F \in \mathrm{Hom}(V \otimes W, U)$ に対して、$\Phi := F \circ \kappa$ とすればよい。（**演習問題**： このことの細部を確認しなさい。）□

命題 1.3 とその証明は、双線形写像 $\Phi : V \times W \to U$ に対して線形写像 $F_\Phi : V \otimes W \to U$ が存在し、$\Phi = F_\Phi \circ \kappa$ を満たすこと、つまり「双線形写像 Φ は $V \otimes W$ 上で F_Φ と**線形化** (linearize) される」ことを意味している。

系 1.4 $\varphi \in V^*$, $\psi \in W^*$ とする。このとき、$F(v \otimes w) := \varphi(v)\psi(w)$ と定義すると、$F \in (V \otimes W)^*$ である。この対応 $V^* \otimes W^* \ni \varphi \otimes \psi \mapsto F \in (V \otimes W)^*$ は k 線形空間としての同型写像になり、$(V \otimes W)^* \cong V^* \otimes W^*$ である。

証明　今までのことより、

$$(V \otimes W)^* = \mathrm{Hom}(V \otimes W, k) \cong \mathcal{L}(V, W; k) \cong V^* \otimes W^*$$

が成り立つ。対応関係をチェックすると、$v \in V$, $w \in W$ に対して

$$V^* \otimes W^* \ni \varphi \otimes \psi \mapsto \Phi(v, w) := \varphi(v)\psi(w) \in \mathcal{L}(V, W; k),$$
$$\mathcal{L}(V, W; k) \ni \Phi \mapsto F_\Phi \in \mathrm{Hom}(V \otimes W, k)$$

という二つの同型写像を合成したものが、$(V \otimes W)^* \cong V^* \otimes W^*$ の同型写像になる。□

命題 1.3 と系 1.4 を合わせると、

$$\mathcal{L}(V, W; k) \cong \mathrm{Hom}(V \otimes W, k) = (V \otimes W)^* \cong V^* \otimes W^*$$

という先ほどと同様な同一視を得る。

命題 1.5 対応 $\alpha \otimes v \mapsto \alpha v$ により、k 上のベクトル空間 V に対して $k \otimes V \cong V$ が成り立つ。

証明　写像 $i: k \times V \to V,\ i(\alpha, v) := \alpha v$ がテンソル積の定義 $(\otimes-1)$, $(\otimes-2)$ を満たすことを示す。$(\otimes-1)$ は、明らかである。$(\otimes-2)$ を示す。任意の写像 $\Phi \in \mathcal{L}(k, V; U)$ に対して、写像 $F_\Phi \in \mathrm{Hom}(V, U) = \mathcal{L}(V; U)$ を、$F_\Phi(v) := \Phi(1, v),\ v \in V$ と定義する。すると、

$$F_\Phi \circ i(\alpha, v) = F_\Phi(\alpha v) = \Phi(1, \alpha v) = \alpha\Phi(1, v) = \Phi(\alpha, v)$$

となるので、$F_\Phi \circ i = \Phi$ が成り立ち、$(\otimes-2)$ が示された。

よって、定理 1.1(2) より、ある線形同型写像 $G: k \otimes V \to V$ が一意に存在し、$i = G \circ \kappa$ が成り立つ。ただし、$\kappa: k \times V \to k \otimes V$ はテンソル積の標準写像である。つまり、次の同型対応が成り立つ:

$$\alpha v = i(\alpha, v) = G \circ \kappa(\alpha, v) = G(\alpha \otimes v). \qquad \square$$

命題 1.6 対応 $v \otimes w \mapsto w \otimes v$ により、k 上のベクトル空間 V, W に対して $V \otimes W \cong W \otimes V$ が成り立つ。

証明　ベクトル積の定義より、線形写像 $f: V \times W \to W \otimes V,\ f(v, w) := w \otimes v$ に対して、線形写像 $F_f: V \otimes W \to W \otimes V$ が存在し $w \otimes v = f(v, w) = F_f \circ \kappa(v, w) = F_f(v \otimes w)$ が成り立つ。ただし、$\kappa: V \times W \to V \otimes W$ はベクトル積の標準写像である。同様に、線形写像 $g: W \times V \to V \otimes W$, $g(w, v) := v \otimes w$ に対して、線形写像 $G_g: W \otimes V \to V \otimes W$ が存在し、$v \otimes w = G_g(w \otimes v)$ が成り立つ。これより、$G_g \circ F_f = \mathrm{id},\ F_f \circ G_g = \mathrm{id}$ なので、$F_f: V \otimes W \to W \otimes V$ は同型写像で、$v \otimes w \mapsto w \otimes v$ は同型対応である。$\square$

今までは、2 つのベクトル空間のテンソル積を考えてきたが、複数個のベクトル空間のテンソル積も同様に定義できる。証明は、演習問題とする。(**演習問題:** 定理 1.7 を証明しなさい。)

定理 1.7　　有限個の k 上のベクトル空間 $V_1, \cdots, V_m$ に対して次が成り立つ:

(1) k 上のベクトル空間 U_0 と $\kappa \in \mathcal{L}(V_1, \ldots, V_m; U_0)$ の対 (U_0, κ) が存在し、次の 2 つ満たす:

　$(\otimes-1)$ U_0 は $\kappa(V_1 \times \cdots \times V_m)$ により生成される。

　$(\otimes-2)$ 任意の $\Phi \in \mathcal{L}(V_1, \cdots, V_m; U)$ に対してある $F_\Phi \in \mathrm{Hom}(U_0, U)$ が存在し、$\Phi = F_\Phi \circ \kappa$ が成り立つ。

$$\begin{tikzcd} V_1 \times \cdots \times V_m \arrow[r, "\kappa"] \arrow[dr, "\Phi"'] & U_0 \arrow[d, "F_\Phi"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowright"] \\ & U \end{tikzcd}$$

(2) (U_0, κ) は次の意味で一意である:「もし、(U_0, κ), (U_0', κ') が (1) を満たせば、線形同相写像 $G: U_0 \to U_0'$ で $G \circ \kappa = \kappa'$ となるものが一意に存在する。」

定義 1.8 ベクトル空間 $V_1, \cdots, V_m$ に対して、定理 *7* の (U_0, κ) を $V_1, \ldots, V_m$ の**テンソル積** *(tensor product)* といい、U_0 を $V_1 \otimes \cdots \otimes V_m$ と、$\kappa(v_1, \cdots, v_m)$ を $v_1 \otimes \cdots \otimes v_k$ と書く。

以前と同様に、

$$V_1 \otimes \cdots \otimes V_m \cong \mathcal{L}(V_1^*, \cdots, V_m^*; k)$$

と同一視できる。(**演習問題:** この同一視をきちんと説明しなさい。)

命題 1.9 k 上のベクトル空間 V_1, V_2, V_3 に対して、次の同型関係が成り立つ*:*

$$V_1 \otimes V_2 \otimes V_3 \cong (V_1 \otimes V_2) \otimes V_3 \cong V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3).$$

証明 ベクトル積の定義より、$V_1 \times V_2 \times V_3$ から $(V_1 \otimes V_2) \otimes V_3$ への 3 重線形写像

$$(v_1, v_2, v_3) \mapsto (v_1 \otimes v_2) \otimes v_3$$

に対して、線形写像 $F : V_1 \otimes V_2 \otimes V_3 \to (V_1 \otimes V_2) \otimes V_3$ が存在し、$F(v_1 \otimes v_2 \otimes v_3) = (v_1 \otimes v_2) \otimes v_3$ が成り立つ。この F が同型写像であることを示す。

任意の $v \in V_3$ を取り、固定する。そして、次のような双線形写像 $\Phi_v : V_1 \times V_2 \to V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$ を考える:

$$\Phi_v(v_1, v_2) := v_1 \otimes v_2 \otimes v, \quad v_1 \in V_1, \quad v_2 \in V_2$$

$$\begin{tikzcd} V_1 \times V_2 \arrow[rr, "\kappa"] \arrow[dr, "\Phi_v"'] & \circlearrowleft & V_1 \otimes V_2 \arrow[dl, "G_v"] \\ & V_1 \otimes V_2 \otimes V_3 & \end{tikzcd}$$

すると、ある線形写像 $G_v : V_1 \otimes V_2 \to V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$ が一意に存在し、

$$v_1 \otimes v_2 \otimes v = \Phi_v(v_1, v_2) = G_v \circ \kappa(v_1, v_2) = G_v(v_1 \otimes v_2)$$

が成り立つ。この時、v に対して G_v は一意に決まるので、それを使うと

$$G_{v+v'} = G_v + G_{v'}, \quad G_{\alpha v} = \alpha G_v, \qquad v, v' \in V_3, \quad \alpha \in k$$

がわかる。(**演習問題:** 上の G_v の線形性を示しなさい。) この G_v を使って、双線形写像 $\Psi : (V_1 \otimes V_2) \times V_3 \to V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$ を、次のように定義する:

$$\Psi(x, v) := G_v(x), \quad x \in V_1 \otimes V_2, \quad v \in V_3$$

$$\begin{tikzcd} (V_1 \otimes V_2) \times V_3 \arrow[rr, "\kappa"] \arrow[dr, "\Psi"'] & \circlearrowleft & (V_1 \otimes V_2) \otimes V_3 \arrow[dl, "G"] \\ & V_1 \otimes V_2 \otimes V_3 & \end{tikzcd}$$

すると、ある線形写像 $G : (V_1 \otimes V_2) \otimes V_3 \to V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$ が一意に存在し、$x = v_1 \otimes v_2$ に対して

$$v_1 \otimes v_2 \otimes v = \Psi(x, v) = G_v(x) = G \circ \kappa(x, v) = G(x \otimes v) = G((v_1 \otimes v_2) \otimes v)$$

が成り立つ。これは、写像 F, G は互いに逆写像であり、F は線形同型写像であることを示している: $V_1 \otimes V_2 \otimes V_3 \cong (V_1 \otimes V_2) \otimes V_3$. 同様に、$V_1 \otimes V_2 \otimes V_3 \cong V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3)$ も示すことができるので、命題が証明された。 □

この命題 1.9 を使うと、有限個のベクトル空間のテンソル積を考える場合、括弧の付け方に関わらずすべて同型と見なすことができることがわかる。よって、以後それらを区別しない。また、命題 1.6 により複数個のベクトル空間のテンソル積を考える場合、適当に並べ変えてもよいことがわかる。特に重要なのは、k 上のベクトル空間を一つとり、$V_i = V$ または $V_i = V^*$ とした場合である。この場合、ベクトル積の順番を入れ替えてもいいことを使うと、p 個の V と q 個の V^* とのベクトル積

$$T^p_q(V) := \overbrace{V^* \otimes \cdots \otimes V^*}^{q} \otimes \overbrace{V \otimes \cdots \otimes V}^{p} \cong \mathcal{L}(\overbrace{V, \cdots, V}^{q}, \overbrace{V^*, \cdots, V^*}^{p}; k)$$

を考えれば十分なことがわかる。このベクトル空間 $T^p_q(V)$ を V の**テンソル空間** (tensor space) といい、その元を、(p, q) 型テンソル、あるいは p 階反変 q 階共変テンソルという[1]。次の命題は、テンソル空間 $T^1_1(V)$ は、$\mathrm{Hom}(V, V)$ に同型であることを主張するものである。

命題 1.10 k 上のベクトル空間 V, W に対して、$V^* \otimes W \cong \mathrm{Hom}(V, W)$ が成り立つ。よって、特に $V^* \otimes V \cong \mathrm{Hom}(V, V)$ である。

証明: $(\varphi, w) \in V^* \times W$ に対して $F_{\varphi,w}(v) \in \mathrm{Hom}(V, W)$ を、

$$F_{\varphi,w}(v) := \varphi(v)w, \qquad v \in V$$

と定義する。この対応 $\Phi : V^* \times W \ni (\varphi, w) \mapsto F_{\varphi,w} \in \mathrm{Hom}(V, W)$ は、明らかに双線形写像なので、テンソル積の定義よりある線形写像 $G : V^* \otimes W \to \mathrm{Hom}(V, W)$ が存在し、

$$F_{\varphi,w} = \Phi(\varphi, w) = G \circ \kappa(\varphi, w) = G(\varphi \otimes w),$$

$$\begin{tikzcd} V^* \times W \arrow[rr, "\kappa"] \arrow[dr, "\Phi"'] \arrow[rr, phantom, shift right=4ex, "\circlearrowright"] & & V^* \otimes W \arrow[dl, "G"] \\ & \mathrm{Hom}(V, W) & \end{tikzcd}$$

が成り立つ。この G が同型写像であることを示したいのだが、2 つのベクトル空間 $V^* \otimes W$ と $\mathrm{Hom}(V, W)$ の次元が一致するので、写像 G が単射であることを示せばよい。元 $x \in V^* \otimes W$ に対

[1]**注: 共変テンソル** (covariant tensor), **反変テンソル** (contravariant tensor)

して、$G(x)=0$ が成り立つとする。前に注意した通り、$x=\sum_{i=1}^{r}\varphi_i\otimes w_i$ と有限和で x を表したとき、$\{w_1,\cdots,w_r\}$ は一次独立であると仮定してよい。よって、任意の $v\in V$ に対して

$$0=G(x)(v)=G\left(\sum_{i=1}^{r}\varphi_i\otimes w_i\right)(v)=\sum_{i=1}^{r}G(\varphi_i\otimes w_i)(v)=\sum_{i=1}^{r}F_{\varphi_i,w_i}(v)=\sum_{i=1}^{r}\varphi_i(v)w_i$$

となるが、$\{w_1,\cdots,w_r\}$ は一次独立なので、すべての $i=1,\cdots,r$ について $\varphi_i(v)=0$ を得る。$v\in V$ は任意なので、$\varphi_i=0$ であるので、$x=0$ を得る。よって、G は 1-対-1 なので、線形同型である。 □

同様に、命題 1.3 と系 1.4 を使うと、

$$T_2^1(V)=V^*\otimes V^*\otimes V\cong (V\otimes V)^*\otimes V\cong \mathrm{Hom}(V\otimes V,V)\cong \mathcal{L}(V,V;V)$$

もわかる。同型対応は、$\varphi_1,\varphi_2\in V^*$, $v\in V$ に対して

$$V^*\otimes V^*\otimes V\ni \varphi_1\otimes\varphi_2\otimes v\mapsto m(v_1,v_2):=\varphi_1(v_1)\varphi_2(v_2)v\in\mathcal{L}(V,V;V),\quad v_1,v_2\in V$$

である。(**演習問題:** この同型対応を確かめなさい。)

次に、テンソル空間 $T_q^p(V)$ の基底について考える。ベクトル空間 V の基底を $\{e_1,\cdots,e_n\}$ とし、その双対基底を $\{f^1,\cdots,f^n\}$ とする。つまり、$f^j(e_i)=\delta_{ij}$ (クロネッカーのデルタ) である。以前注意した通り、このとき $T_q^p(V)$ の基底は

$$\left\{e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_p}\otimes f^{j_1}\otimes\cdots\otimes f^{j_q}\ \middle|\ 1\le i_a\le n, 1\le j_b\le n\right\}$$

である。よって、$T_q^p(V)$ の次元は n^{p+q} である。以下簡単のために、

$$\mu_{i_1,\cdots,i_p}^{j_1,\cdots,j_q}:=e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_p}\otimes f^{j_1}\otimes\cdots\otimes f^{j_q}$$

と書くことにし、これを $T_q^p(V)$ の**標準基底** (standard basis) という。標準基底 $\mu_{i_1,\cdots,i_p}^{j_1,\cdots,j_q}$ を使うと、任意の元 $z\in T_q^p(V)$ は $z=\sum\xi_{j_1,\cdots,j_q}^{i_1,\cdots,i_p}\mu_{i_1,\cdots,i_p}^{j_1,\cdots,j_q}$, $(\xi_{j_1,\cdots,j_q}^{i_1,\cdots,i_p}\in k)$ と表すことができる。

さて、V の基底を $\{e_1,\cdots,e_n\}$ から $\{\tilde{e}_1,\cdots,\tilde{e}_n\}$ に変換することを考えてみよう。基底の変換を表す $n\times n$ 行列を、$A=(\alpha_j^i)$ とする。つまり、$\tilde{e}_j=\sum_i\alpha_j^ie_i$ である。行列 A の逆行列を $A^{-1}=(\beta_j^i)$ とすると、$\{\tilde{e}_j\}$ の双対基底 $\{\tilde{f}_j\}$ は、$\tilde{f}^k=\sum_i\beta_i^kf^i$ と表すことができる。よって、テンソル積の成分は、基底の変換により

$$\tilde{\xi}_{j_1,\cdots,j_q}^{i_1,\cdots,i_p}=\sum_{k_1,\cdots,k_p,l_1,\cdots,l_q}\alpha_{j_1}^{l_1}\cdots\alpha_{j_q}^{l_q}\beta_{k_1}^{i_1}\cdots\beta_{k_p}^{i_p}\xi_{l_1,\cdots,l_q}^{k_1,\cdots,k_p},\qquad(\beta_j^i)=(\alpha_j^i)^{-1}\tag{1.3}$$

と変換されることがわかる。実は、古典的には、あるいは現在でも物理や工学の世界では、ベクトル空間 V の基底の変換の行列 (α^i_j) に対して、変換の公式(1.3)が成り立つような成分 $\xi^{i_1,\cdots,i_p}_{j_1,\cdots,j_q} \in k$ の集合のことを**テンソル**と呼んでいる。これまでの議論を逆にたどれば、この古典的に定義されるテンソルと、我々がこれまで議論してきたテンソルは同じものであることを確かめるのは、それほど難しくない。(**演習問題:** 以上のことの細部を確認しなさい。)