2　交代テンソルと外積代数

2.1　対称テンソルと交代テンソル

ベクトル空間 V の p 階の反変テンソルの空間 $T^p(V) := T^p_0(V)$ を考える。この空間には、ベクトル v_i と v_j 入れ替えることにより、p 次の置換が作用する。正確に述べるために、p 次の置換群 $\mathfrak{S}_p$ を考える。つまり、$\mathfrak{S}_p$ は、置換

$$\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & p \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \cdots & \sigma_p \end{pmatrix}, \qquad \{\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_p\} = \{1, 2, \cdots, p\}$$

で、通常のやり方で積が定義されているもの全体の集合である。また、偶置換、奇置換も通常と同様に定義され、もし、$\sigma \in \mathfrak{S}_p$ が偶置換ならば $\mathrm{sgn}(\sigma) = 1$、奇置換ならば $\mathrm{sgn}(\sigma) = -1$ として、σ の符号を定義する。この置換群 $\mathfrak{S}_p$ の任意の元 $\sigma \in \mathfrak{S}_p$ に対して、次の補題が成り立つ。

補題 2.1 任意の $\sigma \in \mathfrak{S}_p$ に対して、$T^p(V)$ 上の線形変換 $P_\sigma : T^p(V) \to T^p(V)$ で、

$$P_\sigma(v_1 \otimes \cdots \otimes v_p) = v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma^{-1}(p)}, \qquad v_i \in V \tag{2.1}$$

を満たすものが一意に存在する。さらに、P_σ は線形同型写像であり、また

$$P_\sigma P_\tau = P_{\sigma\tau}, \quad \sigma, \tau \in \mathfrak{S}_p, \qquad P_{\mathrm{id}} = T^p(V) \text{ の恒等写像}$$

が成り立つ。ただし、$\mathrm{id} \in \mathfrak{S}_p$ は、恒等置換である。

証明: 写像 Φ を、$V \times \cdots \times V \ni (v_1, \cdots, v_p) \mapsto v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma^{-1}(p)} \in T^p(V)$ により定義する。すると、テンソル積の定義より引き起こされる写像 $P_\sigma := F_\Phi : T^p(V) \to T^p(V)$ は、

$$\begin{tikzcd}
V \times \cdots \times V \arrow[rr, "\kappa"] \arrow[dr, "\Phi"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowright"] & T^p(V) \arrow[dl, "F_\Phi =: P_\sigma"] \\
& T^p(V) &
\end{tikzcd}$$

は、$v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma^{-1}(p)} = \Phi(v_1, \cdots, v_p) = P_\sigma \circ \kappa(v_1, \cdots, v_p) = P_\sigma(v_1 \otimes \cdots \otimes v_p)$ なので、(2.1) を満たす。この P_σ が同型写像であることを示すには、テンソル空間の標準基底の対応を考えればよい。補題の後半も、容易に証明できる。(**演習問題:** 補題の後半部分を、証明しなさい。) □

定義 2.2 テンソル $t \in T^p(V)$ が、任意の置換 σ について $t = P_\sigma(t)$ が成り立つとき**対称テンソル** *(symmetric tensor)* といい、$\mathrm{sgn}(\sigma)t = P_\sigma(t)$ が成り立つとき**交代テンソル** *(alternative tensor)*、あるいは**歪対称テンソル**という。対称テンソルの集合を $S^p(V)$、交代テンソルの集合を $A^p(V)$ と書く。

容易にわかるように、$S^p(V)$, $A^p(V)$ は、$T^p(V)$ の部分空間になる。(**演習問題:** $S^p(V)$, $A^p(V)$ が、$T^p(V)$ の部分空間になることを示しなさい。) この部分空間 $S^p(V)$, $A^p(V)$ の性質を調べるために、線形写像 $\mathcal{S}_p$, $\mathcal{A}_p$ を次のように導入する:

$$\mathcal{S}_p := \frac{1}{p!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_p} P_\sigma, \qquad \mathcal{A}_p := \frac{1}{p!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_p} \mathrm{sgn}(\sigma)P_\sigma.$$

補題 2.3 任意の $\sigma\in\mathfrak{S}_p$ に対して、$P_\sigma\mathcal{S}_p = \mathcal{S}_p P_\sigma = \mathcal{S}_p$, $P_\sigma\mathcal{A}_p = \mathcal{A}_p P_\sigma = \mathrm{sgn}(\sigma)\mathcal{A}_p$ が成り立つ。

証明: τ が $\mathfrak{S}_p$ 全体を動くとき、任意の σ に対して $\sigma\tau$ も $\mathfrak{S}_p$ 全体を動く。よって、

$$P_\sigma\mathcal{S}_p = \frac{1}{p!}P_\sigma\sum_{\tau\in\mathfrak{S}_p} P_\tau = \frac{1}{p!}\sum_{\tau\in\mathfrak{S}_p} P_\sigma P_\tau = \frac{1}{p!}\sum_{\tau\in\mathfrak{S}_p} P_{\sigma\tau} = \mathcal{S}_p$$

を得る。また、$\mathrm{sgn}(\tau) = \mathrm{sgn}(\sigma)\cdot\mathrm{sgn}(\sigma\tau)$ に注意すると、上と同様に

$$P_\sigma\mathcal{A}_p = \frac{1}{p!}P_\sigma\sum_{\tau\in\mathfrak{S}_p}\mathrm{sgn}(\tau)P_\tau = \frac{1}{p!}\mathrm{sgn}(\sigma)\sum_{\tau\in\mathfrak{S}_p}\mathrm{sgn}(\sigma\tau)P_{\sigma\tau} = \mathrm{sgn}(\sigma)\mathcal{A}_p$$

がわかる。 □

補題 2.4 (1) $\mathcal{S}_p^2 = \mathcal{S}_p$, $\mathcal{A}_p^2 = \mathcal{A}_p$.
(2) $t\in T^p(V)$ に対して、「$t\in S^p(V) \Longleftrightarrow \mathcal{S}_p(t) = t$」かつ「$t\in A^p(V) \Longleftrightarrow \mathcal{A}_p(t) = t$」が成り立つ。さらに、$p\geq 2$ ならば、$\mathcal{A}_p\mathcal{S}_p = \mathcal{S}_p\mathcal{A}_p = 0$ である。

証明: (1) 定義と補題 2.3 より、

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_p^2 =& \frac{1}{p!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_p}\mathcal{S}_p P_\sigma = \frac{1}{p!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_p}\mathcal{S}_p = \mathcal{S}_p,\\ \mathcal{A}_p^2 =& \frac{1}{p!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_p}\mathrm{sgn}(\sigma)\mathcal{A}_p P_\sigma = \frac{1}{p!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_p}(\mathrm{sgn}(\sigma))^2\mathcal{A}_p = \mathcal{A}_p\end{aligned}$$

を得る。

(2) 定義より $t\in S^p(V)$ ならば、任意の $\sigma\in\mathfrak{S}_p$ に対して $P_\sigma(t) = t$ なので、

$$\mathcal{S}_p(t) = \frac{1}{p!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_p}P_\sigma(t) = \frac{1}{p!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_p}t = t$$

である。逆に、$\mathcal{S}_p(t) = t$ ならば、補題 2.3 より、$P_\sigma(t) = P_\sigma\mathcal{S}_p(t) = \mathcal{S}_p(t) = t$ なので、$t\in S^p(V)$ である。同様に、$t\in A^p(V)$ ならば、任意の $\sigma\in\mathfrak{S}_p$ に対して $P_\sigma(t) = \mathrm{sgn}(\sigma)t$ なので、

$$\mathcal{A}_p(t) = \frac{1}{p!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_p}\mathrm{sgn}(\sigma)P_\sigma(t) = \frac{1}{p!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_p}(\mathrm{sgn}(\sigma))^2 t = t$$

である。逆に、$\mathcal{A}_p(t)=t$ ならば、補題 2.3 より、$P_\sigma(t)=P_\sigma\mathcal{A}_p(t)=\mathrm{sgn}(\sigma)\mathcal{A}_p(t)=\mathrm{sgn}(\sigma)t$ なので、$t\in A^p(V)$ である。

もし、$p\geq 2$ ならば、偶置換と奇置換は同数なので、$\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_p}\mathrm{sgn}(\sigma)=0$ である。よって、

$$\mathcal{S}_p\mathcal{A}_p=\frac{1}{p!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_p}P_\sigma\mathcal{A}_p=\frac{1}{p!}\mathcal{A}_p\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_p}\mathrm{sgn}(\sigma)=0,\qquad p\geq 2$$

を得る。$\mathcal{A}_p\mathcal{S}_p=0$ も同様に示せる。 □

系 2.5 $p\geq 2$ ならば、 $S^p(V)\cap A^p(V)=\{0\}$ であり、さらに $T^p(V)$ 上の線形写像 $\mathcal{S}_p$, $\mathcal{A}_p$ は、それぞれ部分空間 $S^p(V)$, $A^p(V)$ への射影 *(projection)* である。

証明: $p\geq 2$ として、任意の $x\in S^p(V)\cap A^p(V)$ をとる。$x\in S^p(V)$ なので補題 2.4 より $x=\mathcal{S}_px$ となるので、両辺に $\mathcal{A}_p$ を作用させると $\mathcal{A}_px=\mathcal{A}_p\mathcal{S}_px=0$ を得る。よって、同時に $x\in A^p(V)$ であることより、$x=\mathcal{A}_px=0$ を得る。後半部分は、補題 2.4 と射影の定義より明らかである。 □

補題 2.4 と系 2.5 よりわかる通り、$\mathrm{Im}\mathcal{S}_p=S^p(V)$ かつ $\mathrm{Im}\mathcal{A}_p=A^p(V)$ であり、任意のテンソル $x\in T^p(V)$ に対して $\mathcal{S}_px$ は対称テンソルであり、$\mathcal{A}_px$ は交代テンソルである。そのため、$\mathcal{S}_p$ を**対称化作用素**、$\mathcal{A}_p$ を**交代化作用素**と呼ぶ。

$S^p(V)$ と $A^p(V)$ の次元を考えてみる。$\{e_1,\cdots,e_n\}$ を、ベクトル空間 V の基底とする。以前調べたように、$e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_p}$ という形のテンソルの集合が $T^p(V)$ の基底になる。ただし、$1\leq i_k\leq n$ $(1\leq k\leq p)$ である[2]。よって $S^p(V)$ は、$\mathcal{S}_p(e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_p})$ という形のテンソルの集合で生成される。定義より

$$\mathcal{S}_p(e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_p})=\frac{1}{p!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_p}P_\sigma(e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_p})$$

である。さて、整数の集合 $\{i_1,\cdots,i_p\}$ に対して、もう一つの整数の集合 $\{j_1,\cdots,j_p\}$ が、重複度を込めて $\{i_1,\cdots,i_p\}=\{j_1,\cdots,j_p\}$ となるとき、$\{i_1,\cdots,i_p\}\equiv\{j_1,\cdots,j_p\}$ と書くことにする[3]。ある集合 $\{i_1,\cdots,i_p\}$ に対して、

$$(\star 1)\quad \{i_1,\cdots,i_p\}\equiv\{j_1,\cdots,j_p\},\qquad (\star 2)\quad 1\leq j_1\leq\cdots\leq j_p\leq n$$

となる集合 $\{j_1,j_2,\cdots,j_p\}$ 考える。$\mathcal{S}_p$ の定義において、$\{i_1,i_2,\cdots,i_p\}$ は置換 σ で “シャッフル” されるが、σ が $\mathfrak{S}_p$ 全体を動くときに生成される数列の集合は、$\{j_1,\cdots,j_p\}$ が “シャッフル” されて生成される数列の集合に等しい。よって、

$$\mathcal{S}_p(e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_p})=\mathcal{S}_p(e_{j_1}\otimes\cdots\otimes e_{j_p})$$

[2] 以下しばらく、整数の集合 $\{i_1,i_2,\cdots,i_p\}$ 等を考える場合は、すべて $1\leq i_k\leq n$, $k=1,\cdots,p$ であるとする。

[3] “重複度をこめて” ということの意味は、例えば $\{i_1,\cdots,i_p\}$ に 3 が 4 つ含まれているとすると、$\{j_1,\cdots,j_p\}$ にも 3 が 4 つ含まれているということである

が成り立つことがわかる。しかも、整数の集合 $\{k_1, \cdots, k_p\}$ について $\{j_1, \cdots, j_p\} \neq \{k_1, \cdots, k_p\}$ ならば、$\mathcal{S}_p(e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_p})$ と $\mathcal{S}_p(e_{k_1} \otimes \cdots \otimes e_{k_p})$ は 1 次独立である (**演習問題**： この 1 次独立性を示せ)。よって、$(\star 2)$ を満たすすべての $\{j_1, j_2, \cdots, j_p\}$ について、$\{\mathcal{S}_p(e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_p})\}$ は 1 次独立である。$(\star 2)$ を満たす $\{j_1, j_2, \cdots, j_p\}$ の数は「異なる n 個のものの集合から重複をこめて p 個を選ぶ場合の数」なので ${}_{n+p-1}C_p$ である。よって、次の補題が示された。

定理 2.6 対称テンソルの空間 $S^p(V)$ の基底は

$$\{\mathcal{S}_p(e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_p}) : 1 \leq j_1 \leq j_2 \leq \cdots \leq j_p \leq n\}$$

と表され、$\dim S^p(V) = {}_{n+p-1}C_p$ が成り立つ。

次に、$A^p(V)$ の次元を調べてみる。次の補題は、簡単なものであるが基本的である。

補題 2.7 添字 $\{i_1, \cdots, i_p\}$ に対して、ある $k, l,\ 1 \leq k < l \leq p$ に対して、$i_k = i_l$ であれば、

$$\mathcal{A}_p(e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_p}) = 0$$

である。よって、$p > n$ ならば $A^p(V) = \{0\}$ である。

証明: 置換 $\tau \in \mathfrak{S}_p$ は互換 $\tau := (k\ \ l)$ であるとすると、条件より $P_\tau(e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_p}) = e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_p}$ である。よって、この両辺に $\mathcal{A}_p$ を作用させると、

$$\mathcal{A}_p(e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_p}) = \mathcal{A}_p P_\tau(e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_p}) = \operatorname{sgn}(\tau)\mathcal{A}_p(e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_p}) = -\mathcal{A}_p(e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_p})$$

を得るので、$\mathcal{A}_p(e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_p}) = 0$ がわかる。 □

補題 2.7 より、$p \leq n$ の場合だけを考えればよい。添字の集合 $\{i_1, \cdots, i_p\}$ を考える際、補題 2.7 より、i_k は全て異なるとして良い。$S^p(V)$ の場合と同様に、添字の集合 $\{j_1, \cdots, j_p\}$ で、

$$(\star 3)\quad \{i_1, \cdots, i_p\} = \{j_1, \cdots, j_p\}, \qquad (\star 4)\quad 1 \leq j_1 < \cdots < j_p \leq n$$

を満たすものを考えると、$\mathcal{A}_p(e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_p}) = \pm\mathcal{A}_p(e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_p})$ が成り立つ。$(\star 3), (\star 4)$ を満たす $\{j_1, \cdots, j_p\}$ に対して $\mathcal{A}_p(e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_p})$ を考えると、これらは一次独立になり $A^p(V)$ の基底を構成する。このような添字の取り方の数は、明らかに「n 個のものの集合から異なる p 個を選ぶ場合の数」なので、次の定理が示された。

定理 2.8 交代テンソルの空間 $A^p(V)$ の基底は

$$\{\mathcal{A}_p(e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_p}) : 1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_p \leq n\}$$

と表され、$\dim A^p(V) = {}_nC_p$ が成り立つ。

これまで、$T^p(V)=T^p_0(V)$ について考えてきたが、$T^0_p(V)=T^p_0(V^*)$ について考えることもできる。定義および系 1.4 より

$$T^0_p(V)=T^p(V^*)=V^*\otimes\cdots\otimes V^*\cong(V\otimes\cdots\otimes V)^*=(T^p(V))^*$$

であるので、$T^p(V^*)$ は $T^p(V)$ の双対空間と見ることができる。より具体的には、系 1.4 とその証明より $\varphi_i\in V^*$, $v_i\in V(i=1,\cdots,p)$ に対して $\varphi_1\otimes\cdots\otimes\varphi_p\in(V\otimes\cdots\otimes V)^*$ は、

$$\langle\varphi_1\otimes\cdots\otimes\varphi_p,v_1\otimes\cdots\otimes v_p\rangle=\varphi_1\otimes\cdots\otimes\varphi_p(v_1\otimes\cdots\otimes v_p):=\varphi_1(v_1)\cdots\varphi_p(v_p)$$

と定義されることがわかる。ここで、$\langle\cdot,\cdot\rangle$ は、$T^p(V^*)$ と $T^p(V)$ の間の **duality paring** である。置換 $\sigma\in\mathfrak{S}_p$ に対してテンソルの並び替えの作用素 $P^*_\sigma\in\mathrm{Hom}(T^p(V^*),T^p(V^*))$ は、

$$P^*_\sigma(\varphi_1\otimes\cdots\otimes\varphi_p):=\varphi_{\sigma^{-1}(1)}\otimes\cdots\otimes\varphi_{\sigma^{-1}(p)}$$

と定義される。これにより共変テンソルの場合も、対称テンソルとその空間 $S^p(V^*)$、交代テンソルとその空間 $A^p(V^*)$ が同様に定義され、これまで証明されたことがそのまま成り立つ。なお、$A^p(V^*)$ の要素を、p **形式** (p-form) ということがある。

さて、$T^p(V^*)\cong(V\otimes\cdots\otimes V)^*$ と考える場合に、P^*_σ をもう少し具体的に見てみる。定義より

$$\begin{aligned}P^*_\sigma(\varphi_1\otimes\cdots\otimes\varphi_p)(v_1\otimes\cdots\otimes v_p)=&\varphi_{\sigma^{-1}(1)}\otimes\cdots\otimes\varphi_{\sigma^{-1}(p)}(v_1\otimes\cdots\otimes v_p)\\=&\varphi_{\sigma^{-1}(1)}(v_1)\cdots\varphi_{\sigma^{-1}(p)}(v_p)\\=&\varphi_1\otimes\cdots\otimes\varphi_p(v_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes v_{\sigma(p)})\\=&\varphi_1\otimes\cdots\otimes\varphi_p(P_{\sigma^{-1}}(v_1\otimes\cdots\otimes v_p))\end{aligned}$$

であることがわかる。これを duality paring を使って書くと、

$$\langle P^*_\sigma\varphi,v\rangle=\langle\varphi,P_{\sigma^{-1}}v\rangle,\qquad\varphi\in T^p(V^*),\ v\in T^p(V)$$

となるので、P^*_σ は $P_{\sigma^{-1}}$ の共役作用素 $(P_{\sigma^{-1}})^*={}^tP_{\sigma^{-1}}$ であることがわかる。[4]

次に、$T^p(V^*)\cong\mathcal{L}(V,\cdots,V;k)$ と考える場合について、P^*_σ をもう少し具体的に考えてみる。テンソル積 $t^*\in T^p(V^*)$ に対してある p 重線形写像 $\Phi_{t^*}\in\mathcal{L}(V\times\cdots\times V;k)$ が対応し、

$$\Phi_{t^*}(v_1,\cdots,v_p)=t^*(v_1\otimes\cdots\otimes v_p),\qquad v_k\in V$$

[4]一般に、ベクトル空間 V とその双対空間 V^*、および (連続) 線形写像 $A\in\mathcal{L}(V^*,V^*)$ に対して、ある (連続) 線形写像 $A^*\in\mathcal{L}\ (V,V)$ が一意に存在し、任意の $\varphi\in V$, $v\in V$ に対して $\langle A\varphi,v\rangle=\langle\varphi,A^*v\rangle$ となる。この A^* を A の**共役作用素** (adjoint operator) という。V が有限次元の場合は、線形写像を表す行列の転置行列を考えれば良い。

となるとする。すると $P_\sigma^*(t^*)$ 対して $\Phi_{P_\sigma^*(t^*)}$ は上の計算と同様にして、

$$\Phi_{P_\sigma^*(t^*)}(v_1,\cdots,v_p)=P_\sigma^*(t^*)(v_1\otimes\cdots\otimes v_p)=t^*(v_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes v_{\sigma(p)})=\Phi_{t^*}(v_{\sigma(1)},\cdots,v_{\sigma(p)})$$

がわかる。特に、$t^*\in S^p(V^*)$ または $t^*\in A^p(V^*)$ ならば、対応する p 重線形写像は、それぞれ対称または交代写像である。例えば、$t^*\in A^p(V^*)$ ならば、任意の置換 σ に対して

$$\Phi_{t^*}(v_{\sigma(1)},\cdots,v_{\sigma(p)})=\mathrm{sgn}(\sigma)\Phi_{t^*}(v_1,\cdots,v_p)$$

が成り立つ。

以下、幾何学において重要なので、特に $A^p(V^*)$ を考えよう。また、$A^p(V^*)$ に対応する V の p 個の直積空間上での交代多重線形写像の集合を $\mathrm{Alt}^p(V)$ と書くことにする。テンソル $v\in A^k(V^*)$ と $w\in A^l(V^*)$ に対して、積 $v\wedge w\in A^{k+l}(V^*)$ を交代化作用素を使って $v\wedge w:=\mathcal{A}_{k+l}(v\otimes w)$ と定義し、テンソル $v,\,w$ の**外積** (exterior product) と呼ぶ。例えば、$\varphi,\psi\in V^*$ に対して、

$$\varphi\wedge\psi:=\frac{1}{2}(\varphi\otimes\psi-\psi\otimes\varphi),\qquad \varphi\wedge w(v_1\otimes v_2)=\frac{1}{2}(\varphi(v_1)\psi(v_2)-\varphi(v_2)\psi(v_1)))$$

となる。さらに $\varphi_1,\cdots,\varphi_p\in V^*$ の場合は、

$$\varphi_1\wedge\cdots\wedge\varphi_p(v_1\otimes\cdots\otimes v_p)=\frac{1}{p!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_p}\mathrm{sgn}(\sigma)\varphi_1(v_{\sigma(1)})\cdots\varphi_p(v_{\sigma(p)})$$

となる。もっと一般の場合は、$\varphi\in A^k(V^*)$ かつ $\psi\in A^l(V^*)$ で、$\varphi\leftrightarrow\Phi\in\mathrm{Alt}^k(V)$ かつ $\psi\leftrightarrow\Psi\in\mathrm{Alt}^l(V)$ とすると、

$$\varphi\wedge\psi(v_1\otimes\cdots\otimes v_{k+l})\leftrightarrow\frac{1}{(k+l)!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{k+l}}\mathrm{sgn}(\sigma)\Phi(v_{\sigma(1)},\cdots,v_{\sigma(k)})\Psi(v_{\sigma(k+1)},\cdots,v_{\sigma(k+l)})$$

である。列 $\{i_1,\cdots,i_k,i_{k+1},\cdots,i_{k+l}\}$ を $\{i_{k+1},\cdots,i_{k+l},i_1,\cdots,i_k\}$ と並び替えるには kl 回の互換が必要なことから、

$$\varphi\wedge\psi=(-1)^{kl}\psi\wedge\varphi\in A^{k+l}(V^*),\qquad \varphi\in A^k(V^*),\ \psi\in A^l(V^*)\tag{2.2}$$

であることは、すぐわかる。(**演習問題:** $V^*=\mathbb{R}^3,\,\varphi,\phi\in\mathbb{R}^3\cong(A^1(\mathbb{R}^3))^*$ の場合、$\varphi\wedge\phi$ はベクトル積 $\varphi\times\psi$ と思えることを示しなさい。)

さらに、テンソル空間 $A^k(V^*)$ の直積を考える。もし $k>n$ ならば、$A^k(V^*)=\{0\}$ であった。よって、$A^k(V^*)$ に対して全ての $k=0,1,\cdots$ の直和を考えると、

$$A(V^*):=\bigoplus_{k=0}^{\infty}A^k(V^*)=\bigoplus_{k=0}^{n}A^k(V^*)$$

上で定義した外積は、次のようにして直和 $A(V^*)$ 全体で双線形であるように拡張できる。つまり、$v = \sum_p v_p,\ v_p \in A^p(V^*),\ w = \sum_q w_q,\ w_q \in A^q(V^*)$ に対して、$v \wedge w \in A(V^*)$ を

$$v \wedge w := \sum_{k=0}^{n} \mathcal{A}_k\Big(\sum_{p+q=k} v_p \otimes w_q\Big)$$

と定義する。ここでは証明しないが、この外積は結合法則 $(v \wedge w) \wedge u = v \wedge (w \wedge u)$ を満たし、$A(V^*)$ はこの外積を積として、**多元環** (あるいは**代数** (algebra)) の構造を持つ。この、$A(V^*)$ を**外積代数** (exterior algebra)、あるいは **Grassmann 代数** (Grassmann algebra) と呼ぶ。

2.2 Hodge の $*$ 作用素

この節では、ベクトル空間 V は、$\mathbb{R}$ 上のものとする。ベクトル空間 V 上に、双線形写像 $g : V \times V \to \mathbb{R}$ が定義され、次を満たすとする：

- $g(v,v) \geq 0,\ \forall v \in V.$
- $g(v,v) = 0 \Longleftrightarrow v = 0.$
- $g(v,w) = g(w,v),\ \forall v,w \in V.$

このとき、双線形写像 g を V 上の**内積** (inner product) といい、内積が定義されたベクトル空間を、**内積空間** (inner product space) という。内積空間 V において $g(v,w) = 0$ となるとき、$v,w \in V$ は直交するという。また、$|v| := (g(v,v))^{1/2}$ として、V に**ノルム** (norm)、つまりベクトルの長さを定義することができる。ベクトル空間 V の基底 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ が、

$$g(e_i,e_i) = 1, \quad g(e_i,e_j) = 0,\ i \neq j \qquad i,j = 1,\cdots,n$$

を満たすとき、$\{e_1, \cdots, e_n\}$ は V の**正規直交基底**(orthonormal basis) であるという。

$\{e_1, \cdots, e_n\}$ は、内積空間 V の正規直交基底であるとする。V の双対空間を V^* とかく。双対空間 V^* の要素で

$$\theta_i(e_i) = 1, \quad \theta_i(e_j) = 0,\ i \neq j \qquad i,j = 1,\cdots,n$$

を満たす $\{\theta_1 \cdots, \theta_n\} \subset V^*$ は、V^* の基底になる。これを、V^* の双対基底 (dual basis) という。任意の $\omega \in V^*,\ v \in V$ に対してある $\tau(\omega) \in V$ が存在し、$\omega(v) = g(\tau(\omega), v)$ が成り立つ。実際、$\omega = \sum_{i=1}^n \alpha_i\theta_i,\ \alpha_i \in \mathbb{R}$ に対して、$\tau(\omega) = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$ とすればよい。この同型写像 $\tau : V^* \to V$ を使って V^* 上の内積を、

$$g(\omega,\eta) := g(\tau(\omega),\tau(\eta)), \qquad \omega,\eta \in V^*$$

と定義すると、V^* も内積空間になる。このとき、$\{e_1, \cdots, e_n\}$ の双対基底 $\{\theta_1, \cdots, \theta_n\}$ は、V^* の正規直交基底になる。(**演習問題:** このことを確かめなさい。) さらに、$\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k, \beta_1 \wedge \cdots \wedge \beta_k \in A^k(V^*)$ $(\alpha_i, \beta_j \in V^*)$ に対して

$$g(\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k, \beta_1 \wedge \cdots \wedge \beta_k) := \det(g(\alpha_i, \beta_j))$$

と内積を定義すると、$A^k(V^*)$ も内積空間になる。この内積空間の正規直交基底は、

$$\theta_{i_1} \wedge \cdots \wedge \theta_{i_k}, \qquad 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$$

という形の元全体である。(**演習問題:** (1) $A^k(V^*)$ が上記の内積により、内積空間になることを確かめなさい。(2) $\theta_{i_1} \wedge \cdots \wedge \theta_{i_k}$ という要素が、$A^k(V^*)$ の正規直交基底になることを確かめなさい。)

さて、テンソル空間 $A^k(V^*)$ に、上のように内積が定義されているとする。さらに、V^* に

$$\theta_1, \cdots, \theta_n \text{が} \textbf{正の向き} \text{ (positive orientation)}$$

として、向きを定義するとする。また、$\dim A^k(V^*) = \dim A^{n-k}(V^*)$ に注意すると、$A^k(V^*)$ と $A^{n-k}(V^*)$ はベクトル空間として同型になることに注意する。以上の準備のもとで、線形写像 $* : A^k(V^*) \to A^{n-k}(V^*)$ を、$\omega \in A^k(V^*)$ に対して

$$g(*\omega, \eta)\theta_1 \wedge \cdots \wedge \theta_n = \omega \wedge \eta, \qquad \forall \eta \in A^{n-k}(V^*)$$

が成り立つものとして定義する。(**演習問題:** 写像 $*$ が線形であることを確かめなさい。) すぐに、

$$1^* = \theta_1 \wedge \cdots \wedge \theta_n, \quad *(\theta_1 \wedge \cdots \wedge \theta_n) = 1, \quad *(\theta_1 \wedge \cdots \wedge \theta_k) = \theta_{k+1} \wedge \cdots \wedge \theta_n$$

などがわかる。この写像を、**Hodge の $*$ 作用素**(Hodge's $*$ operator) という。さらに、次の補題が成り立つ。

命題 2.9 *Hodge の $*$ 作用素に関して次が成り立つ: $\forall \omega, \eta \in A^k(V^*)$*

$$\begin{aligned} **\omega &= (-1)^{k(n-k)}\omega, & \omega \wedge *\eta &= \eta \wedge *\omega = g(\omega, \eta)\theta_1 \wedge \cdots \wedge \theta_n, \\ *(\omega \wedge *\eta) &= *(\eta \wedge *\omega) g(\omega, \eta), & g(*\omega, *\eta) &= g(\omega, \eta). \end{aligned}$$

証明: $*$ 作用素の線形性により、ω, η が $\theta_{i_1} \wedge \cdots \wedge \theta_{i_k}$, $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$ という形をしている場合について証明すれば十分である。$j_{k+1}, \cdots, j_n$ を、$\{j_{k+1}, \cdots, j_n\} = \{1, \cdots, n\} - \{i_1, \cdots, i_k\}$, $1 \leq j_{k+1} < \cdots < j_n \leq n$ となるように選ぶと、$*\omega = *\eta = \alpha\theta_{j_{k+1}} \wedge \cdots \wedge \theta_{j_n}$, $\alpha = \mathrm{sgn}(i_1, \cdots, i_k, j_{k+1}, \cdots, j_n)$ である。これを使うと、命題の等式は、いずれも簡単に示せる。(**演習問題:** この ω, η について、命題の等式を示しなさい。) $\square$

以下、$n=2,3$ の場合に Hodge$*$ 作用素を具体的に計算してみる。まず正規直交基底の場合は

$$n=2\text{ の場合：}\qquad *\theta_1=\theta_2,\qquad *\theta_2=-\theta_1 \tag{2.3}$$

$$n=3\text{ の場合：}\qquad \begin{cases} *\theta_1=\theta_2\wedge\theta_3, & *\theta_2=\theta_3\wedge\theta_1, \quad *\theta_3=\theta_1\wedge\theta_2 \\ *(\theta_1\wedge\theta_2)=\theta_3, & *(\theta_2\wedge\theta_3)=\theta_1, \quad *(\theta_3\wedge\theta_1)=\theta_2 \end{cases} \tag{2.4}$$

であることはすぐわかる。次に、正規直交基底でない一般の基底 $\{X_1,\cdots,X_n\}$ について、Hodge$*$ 作用素を計算してみよう。$\{X_i\}$ に対する V^* の双対基底を、$\{d_j\}$ とする：$d_i(X_i)=1$, $d_j(X_i)=0$, $i\neq j$. このとき、$e_i=\sum_j a_{ij}X_j$, $\theta_k=\sum_l b_{kl}d_l$ と表すとき、

$$\delta_{ki}=\theta_k(e_i)=\sum_{k,j}a_{ij}b_{kl}d_l(X_j)=\sum_l a_{il}b_{kl}\quad \text{or}\quad AB^t=I,\ \ A:=(a_{ij}),\ \ B:=(b_{kl})$$

なので、$B:=(A^{-1})^t$ とすればよいことに注意する。

まず、$n=2$ とする。 まず、$\{X_1,X_2\}$ に Gram-Schmidt の直交化を施すと、

$$e_1:=\frac{1}{|X_1|}X_1,\quad e_2:=\frac{1}{|\tilde{e}_2|}\tilde{e}_2,\quad \tilde{e}_2=X_2-g(X_2,e_1)e_1=X_2-\frac{1}{|X_1|^2}g(X_1,X_2)X_1 \tag{2.5}$$

であるが、$g_{ij}:=g(X_i,X_j)$, $i,j=1,2$ とおくと、$g_{11}=|X_1|^2$ に注意して

$$\begin{aligned} |\tilde{e}_2|^2 &= g_{12}+\frac{g_{12}^2}{g_{11}^2}g_{11}-2\frac{g_{12}}{g_{11}}g_{12}=\frac{1}{g_{11}}(g_{11}g_{22}-g_{12}^2)=\frac{G_2}{g_{11}},\qquad G_2:=g_{11}g_{22}-g_{12}^2, \\ e_1 &= \frac{1}{\sqrt{g_{11}}}X_1,\qquad e_2=\frac{1}{\sqrt{g_{11}G_2}}(-g_{12}X_1+g_{11}X_2)=\frac{\sqrt{G_2}}{\sqrt{g_{11}}}(g^{12}X_1+g^{22}X_2),\quad (g^{ij})=(g_{ij})^{-1} \end{aligned}$$

がわかるので、上の $B=(A^{-1})^t$ を使うと

$$\theta_1=\frac{1}{\sqrt{g_{11}}}(g_{11}d_1+g_{12}d_2),\qquad \theta_2=\frac{\sqrt{G_2}}{\sqrt{g_{11}}}d_2 \tag{2.6}$$

を得る。よって、(2.3)より

$$\frac{1}{\sqrt{g_{11}}}(g_{11}*d_1+g_{12}*d_2)=\frac{\sqrt{G_2}}{\sqrt{g_{11}}}d_2,\quad \frac{\sqrt{G_2}}{\sqrt{g_{11}}}*d_2=\frac{-1}{\sqrt{g_{11}}}(g_{11}d_1+g_{12}d_2)$$

なので、これを解くと

$$\begin{aligned} *d_1 &= \frac{1}{\sqrt{G_2}}(g_{12}d_1+g_{22}d_2)=\sqrt{G_2}(-g^{12}d_1+g^{11}d_2) \\ *d_2 &= \frac{-1}{\sqrt{G_2}}(g_{11}d_1+g_{12}d_2)=\sqrt{G_2}(-g^{22}d_1+g^{12}d_2) \\ *1 &= \sqrt{G_2}d_1\wedge d_2,\qquad *(d_1\wedge d_2)=\frac{1}{\sqrt{G_2}}1 \end{aligned} \tag{2.7}$$

がわかった。最後のものは、定義より明らかである。

次に、$n = 3$ とする。上と同様に $g_{ij} := g(X_i, X_j),\ i,j = 1,2,3$ と定義する。$X_1,\ X_2,\ X_3$ に Gram-Schmidt の直交化を施すと、$e_1,\ e_2$ は(2.5)で定義され、e_3 は、

$$
\begin{aligned}
e_3 := \frac{1}{|\tilde{e}_3|}\tilde{e}_3, \quad \tilde{e}_3 :=& X_3 - g(X_3, e_2)e_2 - g(X_3, e_1)e_1 \\
=& X_3 + \frac{g_{12}g_{13} - g_{11}g_{23}}{G_2}X_2 + \frac{g_{12}g_{23} - g_{13}g_{22}}{G_2}X_1 \\
=& X_3 + \frac{G_3}{G_2}g^{32}X_2 + \frac{G_3}{G_2}g^{31}X_1, \qquad (g^{ij}) := (g_{ij})^{-1}, \quad G_3 := \det(g_{ij})_{i,j=1,2,3}
\end{aligned}
$$

と定義される。$|\tilde{e}_3|^2$ を計算すると、

$$
\begin{aligned}
|\tilde{e}_3|^2 =& g_{33} - g(X_3, e_2)^2 - g(X_3, e_1)^2 = g_{33} - \frac{1}{|\tilde{e}_2|^2}g(X_3, \tilde{e}_2)^2 - \frac{g_{13}^2}{g_{11}} \\
=& g_{33} - \frac{g_{11}}{G_2}g(X_3, -\frac{g_{12}}{g_{11}}X_1 + X_2)^2 - \frac{g_{13}^2}{g_{11}} = g_{33} - \frac{g_{11}}{G_2}\left(-\frac{g_{12}g_{13}}{g_{11}} + g_{23}\right)^2 - \frac{g_{13}^2}{g_{11}} \\
=& \frac{1}{G_2}(g_{11}g_{22}g_{33} + 2g_{12}g_{13}g_{22} - g_{11}g_{23}^2 - g_{22}g_{13}^2 - g_{33}g_{12}^2) = \frac{G_3}{G_2}
\end{aligned}
$$

であることがわかるので、全部まとめて

$$
\begin{aligned}
e_3 =& \frac{1}{\sqrt{G_2G_3}}\left((g_{12}g_{23} - g_{13}g_{22})X_1 + (g_{12}g_{13} - g_{11}g_{23})X_2 + (g_{11}g_{22} - g_{12}^2)X_3\right) \\
=& \frac{\sqrt{G_3}}{\sqrt{G_2}}\left(g^{31}X_1 + g^{32}X_2 + g^{33}X_3\right) \qquad (2.8)
\end{aligned}
$$

を得る。さて、$a := 1/\sqrt{g_{11}},\ b_1 = -g_{12}/\sqrt{g_{11}G_2},\ b_2 = g_{11}/\sqrt{g_{11}G_2},\ c_i = \sqrt{G_3}g^{3i}/\sqrt{G_2}$ とおくと、

$$
\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ab_2c_3}\begin{pmatrix} b_2c_3 & 0 & 0 \\ -b_1c_3 & ac_3 & 0 \\ b_1c_2 - c_1b_2 & -ac_2 & ab_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\begin{pmatrix} g_{11} & 0 & 0 \\ g_{12} & \frac{G_3}{\sqrt{G_2}}g^{33} & 0 \\ g_{13} & -\frac{G_3}{\sqrt{G_2}}g^{32} & \frac{\sqrt{g_{11}G_3}}{\sqrt{G_2}} \end{pmatrix}
$$

より、

$$
\theta_1 = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}}(g_{11}d_1 + g_{12}d_2 + g_{13}d_3), \quad \theta_2 = \frac{G_3}{\sqrt{g_{11}G_2}}(g^{33}d_2 - g^{32}d_3), \quad \theta_3 = \frac{\sqrt{G_3}}{\sqrt{G_2}}d_3 \qquad (2.9)
$$

を得る。これから、

$$
\begin{aligned}
\theta_1 \wedge \theta_2 =& \frac{G_3}{\sqrt{G_2}}\left(g^{33}d_1 \wedge d_2 + g^{31}d_2 \wedge d_3 + g^{32}d_3 \wedge d_1\right), \\
\theta_3 \wedge \theta_1 =& \frac{\sqrt{G_3}}{\sqrt{g_{11}G_2}}\left(g_{11}d_3 \wedge d_1 - g_{12}d_2 \wedge d_3\right) \\
\theta_2 \wedge \theta_3 =& \frac{\sqrt{G_3}}{\sqrt{g_{11}}}d_2 \wedge d_3
\end{aligned}
$$

であることはすぐわかる。よって(2.4)を使うと、

$$\begin{pmatrix} \frac{G_3}{\sqrt{G_2}}g^{33} & \frac{G_3}{\sqrt{G_2}}g^{32} & \frac{G_3}{\sqrt{G_2}}g^{31} \\ 0 & \frac{\sqrt{G_3}}{\sqrt{g_{11}G_2}}g_{11} & -\frac{\sqrt{G_3}}{\sqrt{g_{11}G_2}}g_{12} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{G_3}}{\sqrt{g_{11}}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} *(d_1\wedge d_2) \\ *(d_3\wedge d_1) \\ *(d_2\wedge d_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\sqrt{G_3}}{\sqrt{G_2}} \\ 0 & \frac{G_3}{\sqrt{g_{11}G_2}}g^{33} & -\frac{G_3}{\sqrt{g_{11}G_2}}g^{32} \\ \frac{1}{\sqrt{g_{11}}}g_{11} & \frac{1}{\sqrt{g_{11}}}g_{12} & \frac{1}{\sqrt{g_{11}}}g_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{G_3}{\sqrt{G_2}}g^{33} & \frac{G_3}{\sqrt{G_2}}g^{32} & \frac{G_3}{\sqrt{G_2}}g^{31} \\ 0 & \frac{\sqrt{G_3}}{\sqrt{g_{11}G_2}}g_{11} & -\frac{\sqrt{G_3}}{\sqrt{g_{11}G_2}}g_{12} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{G_3}}{\sqrt{g_{11}}} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{G_2}} & -\frac{\sqrt{G_3}}{\sqrt{g_{11}G_2}}g^{32} & \frac{\sqrt{G_3}}{\sqrt{g_{11}G_2}}g^{33}g_{31} \\ 0 & \frac{\sqrt{G_2}}{\sqrt{g_{11}G_3}} & \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}G_3}} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{g_{11}}}{\sqrt{G_3}} \end{pmatrix}$$

がわかるので、これを解いてさらに$**\omega=\omega$を使うと、

$$\begin{pmatrix} *(d_1\wedge d_2) \\ *(d_3\wedge d_1) \\ *(d_2\wedge d_3) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{G_3}} \begin{pmatrix} g_{31} & g_{32} & g_{33} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{11} & g_{12} & g_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}, \tag{2.10}$$

$$\begin{pmatrix} *d_1 \\ *d_2 \\ *d_3 \end{pmatrix} = \sqrt{G_3} \begin{pmatrix} g^{13} & g^{12} & g^{11} \\ g^{23} & g^{22} & g^{21} \\ g^{33} & g^{32} & g^{31} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1\wedge d_2 \\ d_3\wedge d_1 \\ d_2\wedge d_3 \end{pmatrix}, \tag{2.11}$$

$$*\,1=\sqrt{G_3}d_1\wedge d_2\wedge d_3, \qquad *(d_1\wedge d_2\wedge d_3)=\frac{1}{\sqrt{G_3}}1 \tag{2.12}$$

を得る。(**演習問題**： 以上の計算の細部をチェックしなさい。)

次節以降、計量が定義された微分多様体 (Riemann 多様体) の接空間の双対空間上の外積代数の元が**微分形式**(differential form) と呼ばれ、幾何学やその他の分野で極めて重要であることを説明していく。