3　曲面、微分多様体とその上の微分形式

前 2 節で交代テンソルを詳しく扱ったのは、微分形式とは微分多様体の接空間の双対空間上の交代テンソルだからである。この節では、まず滑らかな (超) 曲面、およびその拡張である**微分多様体** (differential manifold) について説明する。

3.1　曲面とその接ベクトル・接空間

n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ 内の (有界) 領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ を考える。$m \geq n$ であるとするとき、m 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^m$ 内の n 次元 (超) 曲面とは、連続写像 $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^m$、あるいはその像 $\varphi(\Omega)$ のことであるとする。通常は、$n = 2$ のとき φ を曲面、$n \geq 3$ のとき超曲面と呼ぶが、以下全て**曲面** (surface) と呼ぶことにする。もし、φ が C^k 級ならば、曲面 φ は C^k 級であるという。点 $q \in \Omega$ において C^1 級曲面 φ のヤコビ行列 $D\varphi(x)$ のランクが n のとき、φ は x において**正則** (regular) であるという。もし、Ω の全ての点において φ が正則のとき、φ は Ω において正則であるといわれる。以下、ここでは次のことを仮定する:

曲面はすべて C^∞ 級で、Ω において正則である。

さて、ある点 $q \in \Omega$ に対して、その点を通る C^∞ 級の曲線 $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \Omega,\ \gamma(0) = q$ を考える。この時、曲面 $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^m$ と曲線 γ の合成 $c(t) := \varphi \circ \gamma(t) = \varphi(\gamma(t))$ は、曲面 φ 上の曲線になる。曲線 $c(t)$ の接ベクトル $c'(0)$ は、$c'(0) = D\varphi(x)\gamma'(0)$ と書ける。もちろん、γ が変化すれば $c'(0)$ も動く。このような、$\gamma(0) = q$ を満たすような C^∞ 級曲線 γ による φ 上の曲線 $c := \varphi \circ \gamma$ の接ベクトル $c'(0)$ の全体を、点 $p := \varphi(q)$ における曲面 φ の**接空間** (tangent space) といい、$T_p\varphi$ とかくことにする。接空間 $T_p\varphi$ には、次のように n 次元実ベクトル空間の構造を定義することができる。定義より、点 p における接ベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in T_p\varphi$ に対しては、ある曲線

$$\gamma_a : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \Omega, \quad \gamma_a(0) = q, \quad c_a(t) := \varphi \circ \gamma_a(0)$$
$$\gamma_b : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \Omega, \quad \gamma_b(0) = q, \quad c_b(t) := \varphi \circ \gamma_a(0)$$

が存在し、$\mathbf{a} = c_a'(0),\ \mathbf{b} = c_b'(0)$ となる。このとき、$\lambda \in \mathbb{R}$ に対して $\tilde{c}(t) := c_a(\lambda t)$ と定義すると、$\tilde{c}'(0) = \lambda c_a'(0) = \lambda\mathbf{a}$ であるので $\lambda\mathbf{a} \in T_p\varphi$ である。また、このとき、$\tilde{c}(t) := (c_a(2t) + c_b(2t))/2$ と定義すると、$\tilde{c}(0) = p$ かつ $\tilde{c}'(0) = c_a'(0) + c_b'(0) = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ なので、$\mathbf{a} + \mathbf{b} \in T_p\varphi$ である。これで、$T_p\varphi$ がベクトル空間になることがわかったが、これは以下に述べる接空間 $T_p\mathbb{R}^d$ の部分空間になる。

$\mathbb{R}^n$ 内の領域 Ω は、恒等写像 $\mathrm{id} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ を考えるとそれ自身曲面である。点 $q \in \Omega$ における接ベクトル全体は $\mathbb{R}^n$ と同型なベクトル空間であり、それは $T_q\mathbb{R}^n$ と表される。これは、要するに

「**点 $q \in \Omega$ を始点とする n 次元ベクトル全体の集合**」である。ちょっとややこしいが、$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ の各点 q に、もう一つのユークリッド空間 $T_q\mathbb{R}^n$ が張り付いているというイメージである。

さらに、後の一般化･抽象化のために、接空間 $T_p\varphi$ の各接ベクトルのもう一つの解釈を示す。q の近傍において C^∞ 級の関数の集合を、C_p^∞ と書くことにする。接ベクトル $\mathbf{a} = (a_1, \cdots, a_m) \in T_p\varphi$, $\mathbf{a} \neq 0$ を任意にとる。すると、$f \in C_p^\infty$ に対して、f の**方向微分**(directional derivative)

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{a}}(p) := \mathbf{a} \cdot \nabla f(p) = a_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(p) + \cdots + a_m \frac{\partial f}{\partial x_m}(p) \in \mathbb{R} \tag{3.1}$$

が定義される。つまり、接ベクトル $\mathbf{a}$ 方向の方向微分を考えることにより、写像 $X_p : C_p^\infty \to \mathbb{R}$ が定義される。この写像は、$f, g \in C_p^\infty$ に対して、

$$\begin{aligned} &X_p(f+g) = X_p(f) + X_p(g), \quad X_p(\lambda f) = \lambda X_p(f), \qquad \lambda \in \mathbb{R}, \\ &X_p(fg) = f(p)X_p(g) + g(p)X_p(f) \end{aligned} \tag{3.2}$$

を満たすことはすぐわかる。逆に、(3.2)を満たす写像 $X_p : C_p^\infty \to \mathbb{R}$ が与えられたとする。まず、定数関数 $a \in \mathbb{R}$ に関しては、$X_p(a) = 0$ となることはすぐわかる。(**演習問題**: 定数関数 a に対して、$X_p(a) = 0$ となることを示しなさい。) 関数 $f \in C_p^\infty$ を、

$$f(x) = f(p) + \sum_{i=1}^m s_i(x_i - p_i) + (x-p) \cdot F(x), \qquad F(p) = 0, \quad F(x) = o(|x-p|)$$

と Taylor 展開すると、性質(3.2)より

$$X_p(f) = s_i \sum_{i=1}^m X_p(x_i - p_i) = s_i \sum_{i=1}^m X_p(x_i)$$

がわかる。ここで、$a_i := X_p(x_i)$ とすると、$s_i = \frac{\partial f(p)}{\partial x_i}$ より $X_p(f)$ は(3.1)の形の方向微分であることがわかる。以上により、

$$\text{接ベクトル}\, \mathbf{a} \in T_p\varphi \longleftrightarrow \text{(3.2)を満たす線形写像}\, X_p : C_p^\infty \to \mathbb{R} \tag{3.3}$$

という同一視が成り立つことがわかる。今は、ユークリッド空間内の曲面を考えているので、微分するだけで接ベクトル・接空間が簡単に定義できるが、抽象的な位相空間内では接ベクトル・接空間は直接には定義できない。そこで、上記の同一視の右側の部分を使って接ベクトル・接空間を定義するのである。詳しくは、次の微分多様体のところで説明する。

3.2 微分多様体とその接ベクトル・接空間

位相空間 M は、第 2 可算公理を満たす Hausdroff 空間であるとする。M の任意の点 $x \in M$ に対して、ある開集合 U と連続写像 $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ が存在し、φ は U とその像 $\varphi(U)$ の間の位相同型写像

とする。ただし、$\varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ には、$\mathbb{R}^n$ の部分集合としての位相が定義されているとする。つまり、位相空間 M は、全ての点の近傍で局所的にユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の開集合と同相であるとする。このとき、M は**多様体** (manifold)、あるいは**局所ユークリッド空間** (locally Eucildian space) であるといわれる。このとき、対 (U, φ) を点 x の近傍の**局所座標** (local coordinate)、**チャート**(chart) などという。また、座標近傍の集合 $\{(U, \varphi)\}$ を考えると、$\{U\}$ は M の被覆 (covering) になっているはずである。この、$\{(U, \varphi)\}$ を、多様体 M の**地図帳** (atlas) という。多様体を考える際に注意すべきなのは、位相空間 M はそのままでは「曲面」とは思えないものがあるという事である。たとえば、「$\mathbb{R}^d$ 内の m 次元部分空間の集合」といったものである。

多様体上で微分を考えるために、次のように微分構造を導入する。多様体 M の 2 つのチャート (U, φ), (V, ψ) が、$U \cap V \neq \emptyset$ であるとする。このとき、$\varphi(U \cap V)$, $\psi(U \cap V)$ はそれぞれ $\mathbb{R}^n$ の開集合であり、$\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合の間の同相写像である。もし、このようなすべての $\psi \circ \varphi^{-1}$ が C^k 級の微分同相写像ならば、多様体 M は C^k 級**微分多様体** (differentiable manifold) であるといわれる。以下、簡単のために微分多様体はすべて C^∞ 級であることにする。

C^∞ 級微分多様体においても、写像 φ^{-1} は通常の意味では微分できないことに注意する。よって、多様体上で接ベクトル・接空間を定義しようとしても、曲面の場合のようにはいかない。だが、M 上の C^∞ 級関数 f という概念は、次のように定義することができる。M を微分多様体とする。M の任意のチャート (U, φ) に対して写像 $f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \mathbb{R}$ が C^∞ 級の時、U 上定義された写像 $f : U \to \mathbb{R}$ は C^∞ 級であるという。U 上の C^∞ 級関数全体の集合を $C^\infty(U)$ と書く。また、M 全体で定義された関数 f が M のすべてのチャート上で C^∞ 級ならば、f は M 上 C^∞ 級であるといわれる。そのような関数全体の集合を $C^\infty(M)$ とかく。

微分多様体上の C^∞ 関数が定義できたので、上記(3.2), (3.3)を使って、$x \in U$ における接ベクトルと接空間を定義することができる。

定義 3.1 微分多様体 M とそのチャート (U, φ) を考える。点 $p \in U$ において、写像 $X : C^\infty(U) \to \mathbb{R}$ が $f, g \in C^\infty(U)$ に対して

$$X(f+g) = X(f) + X(g), \quad X(\lambda f) = \lambda X(f), \qquad \lambda \in \mathbb{R},$$
$$X(fg) = g(p)X(f) + f(p)X(g)$$

を満たすとき、X を p における M の**接ベクトル** *(tangent vector)* という。点 p における M の接ベクトル全体を T_pM と書き、p における M の**接空間** *(tangent space)* と呼ぶ。

接ベクトルに関してすぐわかることを確認していこう。まず、関数 f が U 全体で恒等的に 1 ならば、$X(f) = X(f^2) = 2X(f)$ なので $X(f) = 0$ である。また、関数 f が U 全体で恒等的に定数 a ならば、$X(a) = aX(1) = 0$ なので、同じく $X(a) = 0$ である。接ベクトルは点 x で

の "微分" なので、局所的であるはずである。つまり、点 x の近傍で 2 つの関数 $f,\ g$ が一致していれば、$X(f) = X(g)$ となるはずである。これは、次のように確かめることができる。条件からある $\varepsilon > 0$ が存在し、$\varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ 内の ε-近傍 $B_\varepsilon(\varphi(x))$ において $f \circ \varphi^{-1} = g \circ \varphi^{-1}$ となっているはずである。そこで、C^∞ 級 cut-off 関数 c を、$0 \leq c \leq 1$、かつ $B_{\varepsilon/2}(\varphi(x))$ 内で $c \equiv 1$、$\varphi(U) - B_\varepsilon(\varphi(x))$ で $c \equiv 0$ となるようなものとする。すると、U 全体で $(c\circ\varphi)(f-g) \equiv 0$ であるので、$0 = X(c\circ\varphi(f-g)) = c\circ\varphi(x)X(f-g) = X(f-g)$ より、$X(f) = X(g)$ がわかる。

さて、T_pM 上に

$$(X+Y)(f) := X(f) + Y(f), \quad (\lambda X)(f) := \lambda X(f), \quad X, Y \in T_pM,\ f \in C^\infty(M),\ \lambda \in \mathbb{R}$$

のように和と定数倍を定義すると、T_pM はベクトル空間の構造を持つ。また、(U,φ) を M のチャートするとき、点 $p \in U$ において対応

$$C^\infty(M) \ni f \mapsto \frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial x_i}(\varphi(p)) \in \mathbb{R}$$

を考えると、これは p における接ベクトルになる。この接ベクトルを、

$$\frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \partial_{x_i}, \quad \partial_i$$

などと書くことにする。(**演習問題**: ∂_{x_i} が接ベクトルの定義を満たすことを確かめなさい。) この $\{\partial_{x_i}\}$ が、T_pM の基底になることを以下のように確かめよう。多様体上の点 $p \in M$ に対して、局所座標 (U,φ), $p \in U$ を一つとる。p の近傍の点 $x \in M$ に対して、$\varphi(x) \in \mathbb{R}^n$ の第 i 成分を対応させる写像は、もちろん U 上の C^∞ 級写像である。これも x_i と書くことにする。関数 $f \in C^\infty(M)$ に対して $F := f\circ\varphi^{-1}$ を、点 $q := \varphi(p)$ で Taylor 展開すると、

$$F(x) = F(q) + \sum_{i=1}^n s_i(x_i - q_i) + (x-q)\cdot G(x), \qquad s_i := \frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial x_i}(\varphi(p)), \quad G(q) = 0$$

という形になるので、この各項を φ で M 上に引き戻した上で接ベクトル $X \in T_pM$ に作用させると、

$$X(f) = \sum_{i=1}^n s_i X(x_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial}{\partial x_i}(f), \qquad \lambda_i := X(x_i)$$

がわかる。つまり、任意の接ベクトル X は ∂_{x_i} の線形和でかけるので、$\{\partial_{x_i}\}$ は T_pM の基底である。次に、ある点 $p \in M$ の近傍に 2 つの局所座標 (U,φ), (V,ψ) があり、$p \in U \cap V$ となっている場合を考えよう。このとき、任意の接ベクトル $X \in T_pM$ に対して 2 つの表現

$$X = \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^n \mu_i \frac{\partial}{\partial y_i}, \qquad x = (x_1, \cdots, x_n) = \varphi(U), y = (y_1, \cdots, y_n) = \psi(V)$$

があるが、$y = \psi \circ \varphi^{-1}(x)$ なので

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f \circ \varphi^{-1}(x) = \frac{\partial}{\partial x_i} f \circ \psi^{-1}(\psi \circ \varphi^{-1}(x)) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial y_j}{\partial x_i}(x) \frac{\partial}{\partial y_j} f \circ \psi^{-1}(y)$$

を得る。よって、局所座標の変数変換に関する次の補題を得た。

補題 3.2 点 $p \in M$ の近傍の *2* つの局所座標 (U, φ), (V, ψ), $p \in U \cap V$ が定義する接空間の基底に対して、次の変換公式が成り立つ：

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial y_j}{\partial x_i}(x) \frac{\partial}{\partial y_j}, \qquad x \in \varphi(U),\ y \in \psi(V).$$

3.3 多様体上のベクトル場

多様体 M の局所座標 (U, φ) の各点 $p \in U$ に対して、接ベクトルを対応させる写像

$$U \ni p \mapsto X_p = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i} \in T_p M$$

を考える。係数関数 $\lambda_i(p)$ が U 上 C^∞ 級関数ならば、この対応で U 上に C^∞ 級の**ベクトル場**(vector field) が定義されるという。各局所座標上でベクトル場が定義されていて、それが補題3.2 による変換で整合性が保たれる場合は、多様体 M 全体に C^∞ 級のベクトル場が定義される。M 上の C^∞ 級ベクトル場全体の集合を $\mathcal{X}(M)$ と書くことにする。2 つのベクトル場 $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ に対して、$(X+Y)_p := X_p + Y_p$, $(aX)_p := aX_p$, $a \in \mathbb{R}$ として加法と定数倍を定義すると、$\mathcal{X}(M)$ は $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間になることがわかる。関数 f とベクトル場 $X \in \mathcal{X}(M)$ に対して、Xf は再び M 上の C^∞ 級の関数になることに注意する。つまり、別の関数 g により gXf を考えることもできるし、もう一つベクトル場 $Y \in \mathcal{X}(M)$ をとってくれば YXf を考えることもできる。ベクトル場 X の関数倍 gX は、$\mathcal{X}(M)$ に $C^\infty(M)$-加群の構造を与えることに注意する。

上で注意した通り、2 つのベクトル場 $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ に対して、XY, YX が定義される。そこで、$[X, Y] := XY - YX$ と定義し、これを X, Y の**カッコ積**(bracket) という。局所座標 (U, φ) 上で計算すると、$X = \sum a_i \partial_i$, $Y = \sum b_j \partial_j$ に対して

$$[X, Y] := XY - YX, \qquad [X, Y]f = \sum_{i,j} \left(a_i(\partial_i b_j) - b_i(\partial_i a_j) \right) \partial_j f$$

となることがわかる。